Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2024-2025 учебный год
7 класс
Разбор задач

Пояснения к критериям оценивания.
Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий ***конкретно*** *к данной задаче и записанный* ***верно****. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев.*

Задача 1 (20 б.) Водитель в 9 утра выехал из одного населенного пункта в другой, находящийся на расстоянии 100 км от первого. Он планирует преодолеть этот путь без пробок и закончить поездку в 10:20, при этом рассчитывая потратить 5,6 литра бензина. Однако, на своем пути он трижды попал в пробку: с 9:12 до 9:28 протяженностью 520 м, с 9:56 до 10:12 протяженностью 450 м и с 10:21 по 10:34 протяженностью 860 м. Известно, что при движении в пробке, расход бензина (выраженный в литрах на километр) увеличивается в 2,3 раза. В остальное время он двигался с запланированной первоначально скоростью.

1) Рассчитайте, на сколько процентов больше потрачено бензина за эту поездку по сравнению с тем количеством, которое изначально планировалось водителем.

2) Рассчитайте, на сколько минут позже водитель оказался во втором населенном пункте из-за пробок.

Возможное решение:

1) Расход бензина $R = 5.6$ л на 1 км. Тогда общий планируемый расход бензина

$\text{М}_{\text{план}} = 5{,}60$ литра.

Общее расстояние, которое водитель провел в пробках составляет

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{пр1}} + S_{\text{пр2}} + S_{\text{пр3}} = (520 + 450 + 860)\text{ м} = 1{,}83\text{ км}$$

Во время пробок расход бензина следующий:

$\text{М}_{\text{пр}} = 2{,}3 * 0.056\text{ л/км} * 1{,}83\text{ км} = 0{,}2357\text{ л.}$

Тогда вне пробок автомобиль проехал

$$S_{\text{вне пр}} = (100 - 1{,}83)\text{ км} = 98{,}17\text{ км}$$

Тогда расход такой:

$$\text{М}_{\text{вне пр}} = 5{,}6\text{ л/км} * 98{,}17\text{ км} = 5{,}4975\text{ л}$$

Суммарный фактический расход получается

$$M_{\text{факт}} = (0{,}2357 + 5{,}4975)\text{ л} = 5{,}7332\text{ л}$$

А искомое отношение

$$M_{\text{факт}}/M_{\text{план}} = 5{,}7332/5{,}60 = 1{,}024$$

Ответ: 2,4 %

2) Планируемое время поездки составляет t=1 час 20 мин=4/3 часа. Средняя скорость, с которой планировал двигаться водитель:

$$v_{\text{ср план}} = S/t = 100 \text{ км}/(4/3 \text{ часа}) = 75 \text{ км/ч}$$

Рассчитана общая продолжительность и расстояние трех пробок

$$t_{\text{пр}} = t_{\text{пр1}} + t_{\text{пр2}} + t_{\text{пр3}} = (16 + 16 + 13) \text{ мин} = 45 \text{ мин}$$

Если бы пробок не было, то водитель преодолел бы то расстояние $S_{\text{пр}}$, которое он провел в пробках со средней планируемой скоростью за

$$t_{\text{пр план}} = S_{\text{пр}}/v_{\text{ср план}} = 1{,}83 \text{ км}/(75 \text{ км/ч}) = 1{,}5 \text{ мин}$$

Рассчитано “потраченное” в пробках время, которое как раз является искомым.

$\Delta t = t_{\text{пр}}\text{-}t_{\text{пр план}} = 43{,}5 \text{ мин}$

Ответ: 43,5 мин

Критерии оценивания:

Найден расчетный расход бензина.	2
Найден расход бензина вне пробок.	3
Найден расход бензина в пробках.	3
Найден процент перерасхода бензина.	2
Найдено плановое время поездки.	2
Найдено время пути вне пробок.	3
Найдено время в пробках.	2
Найдено время опоздания.	3

Задача 2. (20 б.) В распоряжении экспериментаторов есть два однородных кубика. Плотность материала первого и второго кубика равна ρ_1 и ρ_2 соответственно. Если поставить первый кубик на второй так, чтобы их центры были на одной вертикали, они оказывают на гладкий горизонтальный стол давление 2250 Па. Если, наоборот, поставить второй кубик на первый таким же образом, давление на тот же стол окажется равным 1000 Па. Первый кубик, лежащий на том же столе, оказывает на него давление 600 Па. Найдите отношение плотностей ρ_2/ρ_1.

Возможное решение:

Обозначим давление первого кубика на стол P_1, в случае, когда первый стоит на втором - P_{12}, когда второй стоит на первом P_{21}. Распишем эти давления через вес тела. Массу кубиков выразим через объем.

$$P_{12} = \frac{\rho_1 a_1^3 + \rho_2 a_2^3}{a_2^2} g$$

$$P_{21} = \frac{\rho_1 a_1^3 + \rho_2 a_2^3}{a_1^2} g$$

$$P_1 = \frac{\rho_1 a_1^3}{a_1^2} g = \rho_1 a_1 g => a_1 = \frac{P_1}{g\rho_1}$$

Разделим первое уравнение на вторе

$$\frac{P_{12}}{P_{21}} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

$$a_2 = a_1 \sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}$$

Подставим в выражение для давления P_{21}

$$P_{21} = \frac{\rho_1 a_1^3 + \rho_2 a_1^3 \left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3}{a_1^2} g = g a_1 \left(\rho_1 + \rho_2 \left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3\right)$$

$$\frac{P_{21}}{P_1} = \frac{1}{\rho_1}\left(\rho_1 + \rho_2 \left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3\right) = 1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\left(\frac{P_{21}}{P_1} - 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3}$$

Подставим численные значения

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{9}{4}$$

Критерии оценивания:

Массы кубиков выражены через ребро и плотность.	4
Записано выражение для давления кубиков на стол в различных случаях.	6
Неизвестные величины исключены из уравнений.	5
Найдено искомое отношение плотностей.	5

Задача 3. (20 б.) Прямоугольный брусок высотой 8 см имеет структуру из очень мелких пор, которые позволяют веществу при погружении в воду впитывать ее. Этот брусок кладут основанием на поверхность воды, вода начинает проникать в поры бруска, и он постепенно опускается в воду, оставаясь в горизонтальном положении. Когда нижняя грань бруска погрузилась на глубину 5 см, он уравновесился на воде и остановился. Известно, что каждый кубический сантиметр части бруска, находящейся под водой, впитывает ее в количестве 370 мг. Также вода частично переходит в брусок выше поверхности воды следующим образом: каждый слой над поверхностью воды высотой 1 см впитывает в 2 раза меньше воды, чем такой же слой, расположенный под ним. Определите плотность материала бруска в сухом состоянии. Несмотря на пористую структуру, в этой задаче считайте его материал однородным. Плотность воды 1000 кг/м^3.

Указание: средняя плотность тела, плавающего на поверхности жидкости, относится к плотности жидкости как объем погруженной части к полному объему тела.

Возможное решение:

Когда брусок достигнет равновесной глубины $h_{\text{погр}}$= 5 см и одновременно впитает указанное количество воды, плотность его погруженной части будет равна сумме искомой плотности сухого бруска $\rho_б$ и плотности воды, которая им впитывается $a = 370\ \text{мг/см}^3$.

$$\rho_{\text{погр}} = \rho_б + a$$

Над поверхностью воды находится 3 см бруска. Плотность его верхних частей, отстоящий от поверхности до 1см, от 1 до 2 см и от 2 до 3 см определяется аналогично с учетом того, что каждый слой над поверхностью воды высотой 1 см впитывает в 2 раза меньше воды, чем такой же слой, расположенный под ним:

$$\rho_1 = \rho_б + a/2,$$

$$\rho_2 = \rho_б + a/4,$$

$$\rho_3 = \rho_б + a/8$$

Площадь его основания бруска обозначим за S, высоту 1 см над поверхностью воды за Δh. Определим равновесную массу бруска на воде:

$$m = S * h_{\text{погр}} * \rho_{\text{погр}} + S * \Delta h * (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) =$$

$$= S * \{h_{\text{погр}} * (\rho_б + a) + \Delta h * (3 + a/2 + a/4 + a/8)\} =$$

$$= S * \{h_{\text{погр}} * (\rho_б + a) + \Delta h * (3\rho_б + 7/8 * a)\}$$

Утверждение из указания к задаче можно переформулировать так: произведение средней плотности тела, плавающего на поверхности воды, на его объем (а это произведение как раз является определенной выше массой) равно произведению плотности воды на объем погруженной части:

$$m = \rho_в * S * h_{\text{погр}}.$$

При подстановке выражения для массы сократится площадь и получим:

$h_{\text{погр}} * (\rho_б + a) + \Delta h * (3\rho_б + 7/8 * a) = \rho_в * h_{\text{погр}},$

отсюда плотность сухого бруска

$$\rho_б = \{(\rho_в - \text{a}) * h_{\text{погр}} - 7/8 * \Delta h * a\}/h,$$

где h - данная в условии полная высота бруска (8 см).

Подставляя числовые данные, получаем

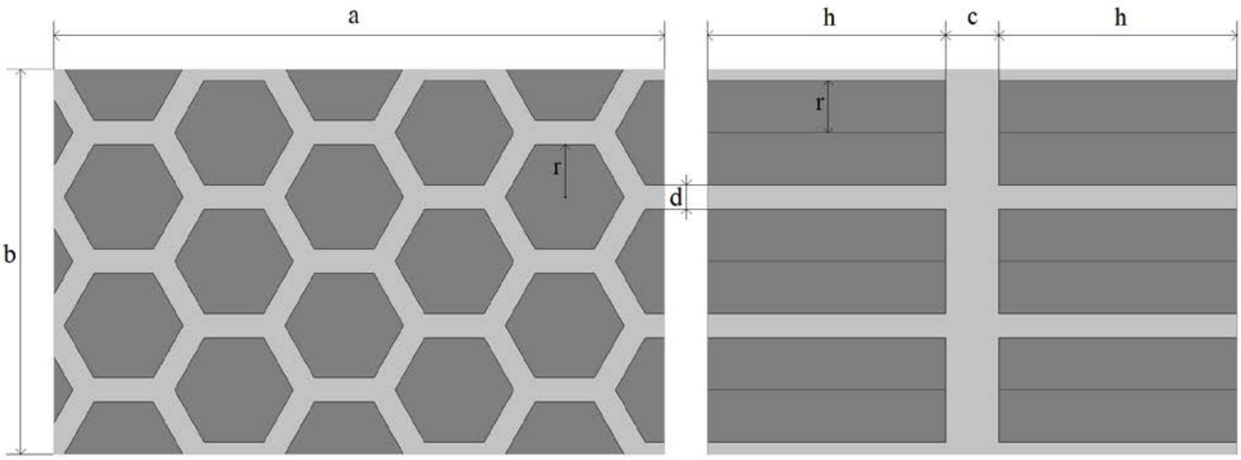
$\rho_б = 353$ кг/м^3 $\approx 0.35\ г/см^3$

Критерии оценивания:

Плотность различных слоев бруска выражена через известные величины и плотность сухого бруска.	5
Записана масса плавающего бруска.	5
Связь массы бруска, погруженного объема и плотности воды.	4
Получено выражение для плотности сухого бруска.	3
Численный ответ.	3

Задача 4. (20 б.) Пчелиный сот представляет собой восковую конструкцию, состоящую из основания толщиной $c = 1$ мм, по обе стороны которого расположены ячейки, имеющие форму шестиугольной призмы. Глубина ячеек $h = 15$ мм. Расстояние от центра ячейки до ее стенки $r = 2$ мм. Толщина стенки между соседними ячейками $d = 0{,}4$ мм. Какую приблизительно массу меда запасли пчелы в соте размером $a \times b$, $a = 40$ см, $b = 30$ см, если масса этого сота, заполненного медом, $m = 5$ кг? Плотность пчелиного воска $\rho = 0{,}95 \frac{г}{см^3}$. Площадь правильного шестиугольника можно вычислить по формуле $S = 2\sqrt{3}r^2 \approx 3{,}46r^2$, где r – расстояние от центра шестиугольника до его стороны.

(В задаче приведена упрощенная модель. В реальных сотах основание и ячейки имеют более сложную форму)



Вид сверху Вид сбоку

Возможное решение:

Запишем соотношение для масс:

$$m = m_м + m_в$$

где m – общая масса сота, $m_м$ – искомая масса меда, $m_в$ – масса воска, из которого состоит сот.

Тогда масса меда

$$m_м = m - m_в$$

Масса сота m известна из условий задачи. Неизвестной является масса воска. Найдем $m_в$.

Пусть $V_в$ – общий объем воска, из которого состоит сот. Тогда, зная плотность воска ρ, будем иметь

$$m_в = \rho V_в$$

Отсюда масса меда

$$m_м = m - \rho V_в$$

Найдем объем воска $V_в$. Запишем соотношение для объемов:

$$V = V_м + V_в$$

где $V = ab(c + 2h)$ – общий объем сота, $V_м$ – объем меда. Выразив объем воска и подставив его в выражение для массы меда, будем иметь

$$m_м = m - \rho(ab(c + 2h) - V_м)$$

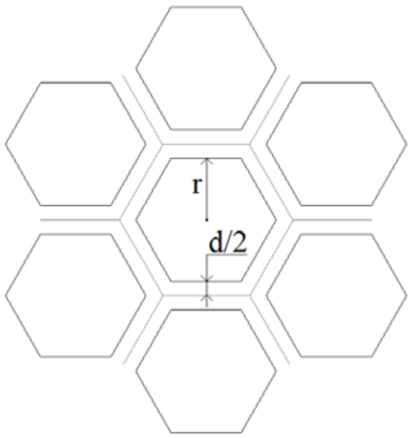
Объем меда $V_м$ можно выразить как объем одной ячейки V_0, умноженный на удвоенное (так как ячейки расположены с двух сторон) количество ячеек N с одной стороны сота:

$$V_м = 2NV_0$$

Объем одной ячейки равен произведению ее шестиугольного основания на глубину h

$$V_0 = 2\sqrt{3}r^2h$$

Чтобы найти количество ячеек с одной стороны сота, разобьем его поверхность на правильные шестиугольники, как показано на рисунке.



Видно, что на каждую ячейку кроме площади ее основания также приходится часть площади стенок между ячейками – от краев ячейки до середин стенок с соседними ячейками. На краю сота такой подход вносит небольшую погрешность, но мы пренебрегаем ей для простоты. Для подсчета количества ячеек нам нужно знать площадь, занимаемую одной ячейкой с учетом стенок, то есть площадь правильного шестиугольника, образованного отрезками, проходящими через середины стенок. Расстояние от центра до стороны для такого шестиугольника $r + \frac{d}{2}$. Тогда его площадь

$$S_0 = 2\sqrt{3}\left(r + \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2r + d)^2$$

Площадь поверхности сота с одной стороны равна произведению площади S_0 на количество ячеек N. Отсюда

$$N = \frac{ab}{S_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{ab}{(2r+d)^2}$$

Тогда объем меда

$$V_{\text{м}} = 2NV_0 = \frac{8abr^2h}{(2r+d)^2}$$

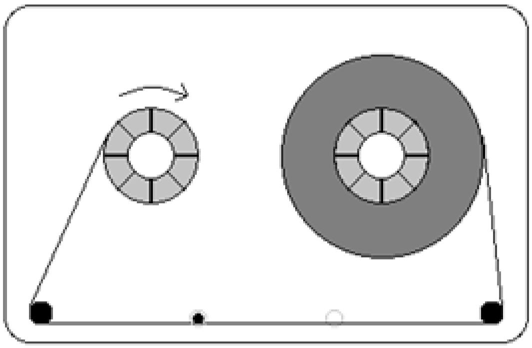
Подставив $V_{\text{м}}$ в выражение для массы меда, получим ответ

$$m_{\text{м}} = m - \rho ab\left(c + 2h - \frac{8r^2h}{(2r+d)^2}\right) \approx 4{,}3 \text{ кг}$$

Критерии оценивания:

Записан объем сота через известные величины.	3
Записано выражение для объема меда через число ячеек.	4
Найдено примерное количество ячеек.	6
Найден объем меда.	4
Найдена масса меда.	3

Задача 5. (20 б.) Относительно недавно был популярен такой носитель информации, как аудиокассета. Она представляла собой плоскую пластиковую коробочку с закрепленными внутри двумя одинаковыми катушками, к которым была прикреплена магнитная лента – тонкая пластиковая лента с нанесенным на нее слоем специального материала, способного в течение длительного времени сохранять намагниченность. При вращении одной из катушек лента перематывалась на нее с другой катушки. Также лента была натянута на два маленьких ролика, которые располагались в нижней части кассеты. В нижней части кассеты были отверстия для рабочих частей воспроизводящего устройства – магнитофона.



В режиме перемотки (см. рисунок) лента двигалась только за счет двигателя, задававшего частоту оборотов ведущей катушки. Лента перематывалась с ведомой катушки на ведущую.

Найдите зависимость скорости движения ленты от времени в режиме перемотки, если период (время, в течение которого совершается один оборот) вращения ведущей катушки T. Радиус катушки без ленты r_0, толщина ленты $d \ll r_0$. В начальный момент времени ведущая катушка была полностью размотана.

Возможное решение:

Так как толщина ленты мала по сравнению с радиусом катушки, при ее намотке за один период вращения радиус катушки мало изменится по сравнению с текущим значением, поэтому можно приблизительно считать, что за один оборот на ведущую катушку намотается кусок ленты длиной $2\pi r(t)$, где $r(t)$ – радиус катушки в текущий момент времени t. Тогда скорость ленты в момент времени t

$$v(t) = \frac{2\pi r(t)}{T}$$

За период T радиус катушки увеличивается на толщину ленты d, поэтому изменение радиуса катушки в единицу времени

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d}{T}$$

Если $\Delta r = r(t) - r_0$, а $\Delta t = t - t_0$, где $t_0 = 0$ – начальный момент времени, когда радиус ведущей катушки был равен r_0, то

$$r(t) = r_0 + d\frac{t}{T}$$

Тогда для скорости ленты получим

$$v(t) = \frac{2\pi}{T}\left(r_0 + d\frac{t}{T}\right)$$

Критерии оценивания:

Скорость ленты выражена через радиус катушки.	4
Изменение радиуса катушки выражено через толщину ленты и период.	6
Найдена зависимость радиуса катушки от времени.	6
Найдена зависимость скорости ленты от времени.	4