Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2024-2025 учебный год
8 класс
Разбор задач

Пояснения к критериям оценивания.
Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий ***конкретно*** *к данной задаче и записанный* ***верно****. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев.*

Задача 1. (20 б.) Прямоугольный брусок высотой 6 см имеет структуру из очень мелких пор, которые позволяют веществу при погружении в воду впитывать ее. Этот брусок кладут основанием на поверхность воды, вода начинает проникать в поры бруска, и он постепенно опускается в воду, оставаясь в горизонтальном положении. Через очень продолжительное время нижняя грань бруска погрузилась на глубину h, он уравновесился на воде и остановился. Известно, что каждый кубический сантиметр части бруска, находящейся под водой, постепенно впитывает ее в количестве 500 мг. Выше поверхности воды брусок также впитывает воду, но в количестве 100 мг на см^3, вне зависимости от высоты над поверхностью воды. Впитывание воды бруском полностью обратимо. Плотность материала бруска в сухом состоянии 300 кг/м^3. Несмотря на пористую структуру, в этой задаче считайте его материал однородным. Плотность воды 1000 кг/м^3. Основываясь на указанной закономерности впитывания воды бруском, определите равновесную глубину погружения h.

Возможное решение:

Так как, рано или поздно, брусок впитает воду в размере 100 мг/см^3 = 100 кг/м^3, обозначим плотность «влажного» бруска ρ_d = (100 + 300) кг/м^3. Обозначим за f долю от всего объема, находящуюся ниже поверхности воды. Обозначим за a = (500 – 100) кг/м^3

Запишем известное выражение для f через среднюю плотность плавающего тела ρ

$$f = \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}}$$

$$\rho = f\rho_{\text{в}}$$

С другой стороны, среднюю плотность можно выразить через f с учетом закономерности впитывания воды. Обозначим за h_0 и S толщину и площадь бруска

$$\rho = \frac{h_0 S\rho_d + afh_0 S}{h_0 S} = \rho_d + af$$

$$\rho_d + af = f\rho_{\text{в}}$$

$$f = \frac{\rho_d}{\rho_{\text{в}} - a} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3}$$

$$h = fh_0 = 4\text{ см}$$

Критерии оценивания:

Средняя плотность тела выражена через плотность воды и глубину погружения через условие равновесия.	7
Средняя плотность выражена через плотность сухого бруска и количество впитываемой воды.	7
Аналитическое выражение для глубины погружения (не обязательно, засчитывается автоматически если найден верный ответ).	4
Численное значение глубины погружения.	2

Задача 2. (20 б.) Две узкие полосы из меди и алюминия длиной L = 1 м и толщиной b = 3 мм каждая, спаяны вместе по всей площади соприкосновения наибольшими гранями. При комнатной температуре такая система – идеально прямой брусок. Систему нагрели на T = 100 ^{o}C, в результате она искривилась. Оценить радиус кривизны такого бруска после нагревания. Коэффициент линейного теплового расширения алюминия α_{Al} = $23\cdot10^{-6}$ $^{o}C^{-1}$, меди α_{Cu} = $17\cdot10^{-6}$ $^{o}C^{-1}$.

Указание: длина дуги равна произведению радиуса окружности и угла в радианах.

Возможное решение:

Представим соединенные полосы после нагревания в виде дуг, отвечающих одному и тому же углу β [рад] (так как они спаяны), но с разным радиусом. Для оценки примем, что радиусы отличаются на расстояние между серединами металлических слоев. Длины этих дуг сопоставим с длинами полос (в центре слоя металла) после теплового расширения.

$$\beta(R+b) \approx L(1+\alpha_{Al}T)$$

$$\beta R \approx L(1+\alpha_{Cu}T)$$

Вычтем второе уравнение из первого

$$\beta b \approx LT(\alpha_{Al}-\alpha_{Cu})$$

Принимая во внимание, что длины дуг отличаются от L незначительно, ввиду малости коэффициентов линейного теплового расширения алюминия и меди, и угол связан с длиной дуги, т.е. $\beta R \approx L$, откуда

$$\frac{Lb}{R} \approx LT(\alpha_{Al}-\alpha_{Cu})$$

$$R \approx \frac{b}{T(\alpha_{Al}-\alpha_{Cu})}$$

Подставим численные значения

$$R \approx 5 \text{ м}$$

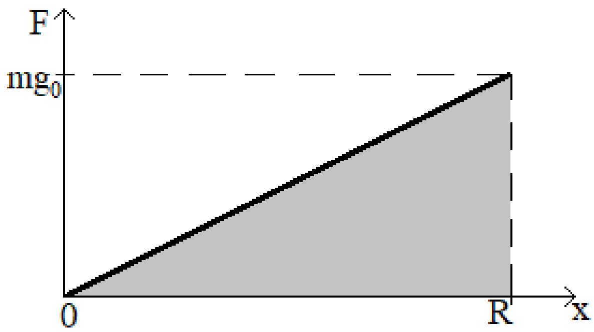
Критерии оценивания:

Удлинение пластин выражено через температуру.	2
Система представлена в виде дуг с разным радиусом.	7
Угол исключен из уравнений или найден.	6
Найдено приближенное значение искомого радиуса кривизны.	5

Задача 3. (20 б.) Проведем мысленный эксперимент. Представим, что сквозь Землю прорыт прямой бездонный «колодец», проходящий через ее центр и имеющий два выхода на противоположных концах Земли. Известно, что ускорение свободного падения внутри земного шара зависит от расстояния от центра Земли как $g(r) = g_0 \frac{r}{R}$, где $g_0 = 9{,}8 \frac{м}{с^2}$ – ускорение свободного падения у земной поверхности, $R = 6{,}37 * 10^6 м$ – радиус Земли. Если бросить стальной шарик в «колодец», какую максимальную скорость он бы набрал? Силой сопротивления воздуха пренебречь. В данной задаче Землю считать идеальным однородным шаром.

Возможное решение:

Найдем потенциальную энергию шарика на поверхности Земли относительно центра Земли. Так как в зависимости от расстояния от центра Земли сила тяжести изменяется, потенциальная энергия в данном случае не будет рассчитываться как потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли.



Если посмотреть на график зависимости силы тяжести от координаты шарика, видно, что суммарная работа, совершаемая силой тяжести по перемещению шарика от поверхности Земли $x = R$ к центру Земли $x = 0$, меньше, чем была бы при постоянной силе тяжести, не зависящей от координаты. Эта работа равна площади треугольника – фигуры под графиком $F(x)$ при x изменяющемся от 0 до R. Потенциальная энергия шарика (относительно центра Земли) на поверхности Земли будет равна этой работе. Тогда

$$E_{пmax} = \frac{mg_0R}{2}$$

Воспользуемся законом сохранения энергии

$$E_{пmax} = E_{кmax} = \frac{m{v_{max}}^2}{2} = \frac{mg_0R}{2}$$

Кинетическую энергию можно также непосредственно приравнять к работе силы тяжести. Для v_{max} окончательно получим

$$v_{max} = \sqrt{g_0R} \approx 7{,}9 \frac{км}{с}$$

(Что равно первой космической скорости вблизи поверхности Земли)

Критерии оценивания:

Изменение потенциальной или кинетической энергии шарика связано с работой силы тяжести.	6
Найдена работа силы тяжести. Произведение средней силы тяжести на перемещение (высоту) тоже считается правильным.	8
Найдена искомая скорость в символьном виде (не обязательно, засчитывается в случае верного ответа).	4
Верное численное значение скорости.	2

Задача 4. (20 б.) В распоряжении экспериментаторов есть два однородных кубика. Плотность материала первого и второго кубика равна ρ_1 и ρ_2 соответственно. Если поставить первый кубик на второй так, чтобы их центры были на одной вертикали, они оказывают на гладкий горизонтальный стол давление 2250 Па. Если, наоборот, поставить второй кубик на первый таким же образом, давление на тот же стол окажется равным 1000 Па. Первый кубик, лежащий на том же столе, оказывает на него давление 600 Па. Найдите отношение плотностей ρ_2/ρ_1.

Возможное решение:

Обозначим давление первого кубика на стол P_1, в случае, когда первый стоит на втором - P_{12}, когда второй стоит на первом P_{21}. Распишем эти давления через вес тела. Массу кубиков выразим через объем.

$$P_{12} = \frac{\rho_1 a_1^3 + \rho_2 a_2^3}{a_2^2} g$$

$$P_{21} = \frac{\rho_1 a_1^3 + \rho_2 a_2^3}{a_1^2} g$$

$$P_1 = \frac{\rho_1 a_1^3}{a_1^2} g = \rho_1 a_1 g => a_1 = \frac{P_1}{g\rho_1}$$

Разделим первое уравнение на вторе

$$\frac{P_{12}}{P_{21}} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

$$a_2 = a_1 \sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}$$

Подставим в выражение для давления P_{21}

$$P_{21} = \frac{\rho_1 a_1^3 + \rho_2 a_1^3 \left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3}{a_1^2} g = g a_1 \left(\rho_1 + \rho_2 \left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3\right)$$

$$\frac{P_{21}}{P_1} = \frac{1}{\rho_1}\left(\rho_1 + \rho_2 \left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3\right) = 1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\left(\frac{P_{21}}{P_1} - 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{P_{21}}{P_{12}}}\right)^3}$$

Подставим численные значения

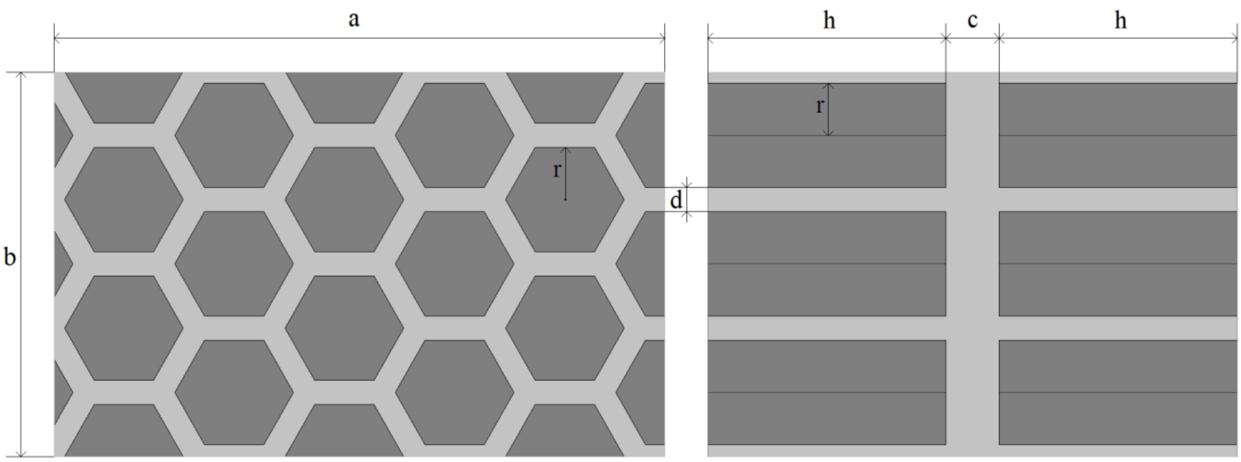
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{9}{4}$$

Критерии оценивания:

Массы кубиков выражены через ребро и плотность.	4
Записано выражение для давления кубиков на стол в различных случаях.	6
Неизвестные величины исключены из уравнений.	5
Найдено искомое отношение плотностей.	5

Задача 5. (20 б.) Пчелиный сот представляет собой восковую конструкцию, состоящую из основания толщиной $c = 1$ мм, по обе стороны которого расположены ячейки, имеющие форму шестиугольной призмы. Глубина ячеек $h = 15$ мм. Расстояние от центра ячейки до ее стенки $r = 2$ мм. Толщина стенки между соседними ячейками $d = 0{,}4$ мм. Какую приблизительно массу меда запасли пчелы в соте размером $a \times b$, $a = 40$ см, $b = 30$ см, если масса этого сота, заполненного медом, $m = 5$ кг? Плотность пчелиного воска $\rho = 0{,}95\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Площадь правильного шестиугольника можно вычислить по формуле $S = 2\sqrt{3}r^2 \approx 3{,}46r^2$, где r – расстояние от центра шестиугольника до его стороны.

(В задаче приведена упрощенная модель. В реальных сотах основание и ячейки имеют более сложную форму)



Вид сверху Вид сбоку

Возможное решение:

Запишем соотношение для масс:

$$m = m_{\text{м}} + m_{\text{в}}$$

где m – общая масса сота, $m_{\text{м}}$ – искомая масса меда, $m_{\text{в}}$ – масса воска, из которого состоит сот.

Тогда масса меда

$$m_{\text{м}} = m - m_{\text{в}}$$

Масса сота m известна из условий задачи. Неизвестной является масса воска. Найдем $m_{\text{в}}$.

Пусть $V_{\text{в}}$ – общий объем воска, из которого состоит сот. Тогда, зная плотность воска ρ, будем иметь

$$m_{\text{в}} = \rho V_{\text{в}}$$

Отсюда масса меда

$$m_м = m - \rho V_в$$

Найдем объем воска $V_в$. Запишем соотношение для объемов:

$$V = V_м + V_в$$

где $V = ab(c + 2h)$ – общий объем сота, $V_м$ – объем меда. Выразив объем воска и подставив его в выражение для массы меда, будем иметь

$$m_м = m - \rho(ab(c + 2h) - V_м)$$

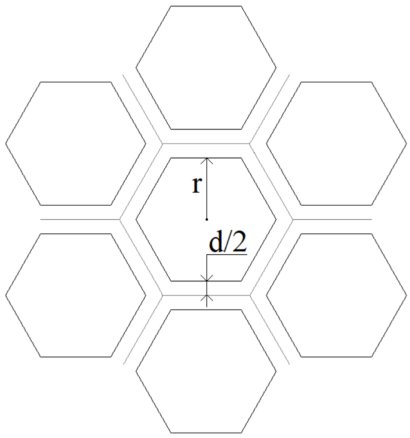
Объем меда $V_м$ можно выразить как объем одной ячейки V_0, умноженный на удвоенное (так как ячейки расположены с двух сторон) количество ячеек N с одной стороны сота:

$$V_м = 2NV_0$$

Объем одной ячейки равен произведению ее шестиугольного основания на глубину h

$$V_0 = 2\sqrt{3}r^2h$$

Чтобы найти количество ячеек с одной стороны сота, разобьем его поверхность на правильные шестиугольники, как показано на рисунке.



Видно, что на каждую ячейку кроме площади ее основания также приходится часть площади стенок между ячейками – от краев ячейки до середин стенок с соседними ячейками. На краю сота такой подход вносит небольшую погрешность, но мы пренебрегаем ей для простоты. Для подсчета количества ячеек нам нужно знать площадь, занимаемую одной ячейкой с учетом стенок, то есть площадь правильного шестиугольника, образованного отрезками, проходящими через середины стенок. Расстояние от центра до стороны для такого шестиугольника $r + \frac{d}{2}$. Тогда его площадь

$$S_0 = 2\sqrt{3}\left(r + \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2r + d)^2$$

Площадь поверхности сота с одной стороны равна произведению площади S_0 на количество ячеек N. Отсюда

$$N = \frac{ab}{S_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{ab}{(2r + d)^2}$$

Тогда объем меда

$$V_м = 2NV_0 = \frac{8abr^2h}{(2r+d)^2}$$

Подставив $V_м$ в выражение для массы меда, получим ответ

$$m_м = m - \rho ab\left(c + 2h - \frac{8r^2h}{(2r+d)^2}\right) \approx 4{,}3 \text{ кг}$$

Критерии оценивания:

Записан объем сота через известные величины.	3
Записано выражение для объема меда через число ячеек.	4
Найдено примерное количество ячеек.	6
Найден объем меда.	4
Найдена масса меда.	3