

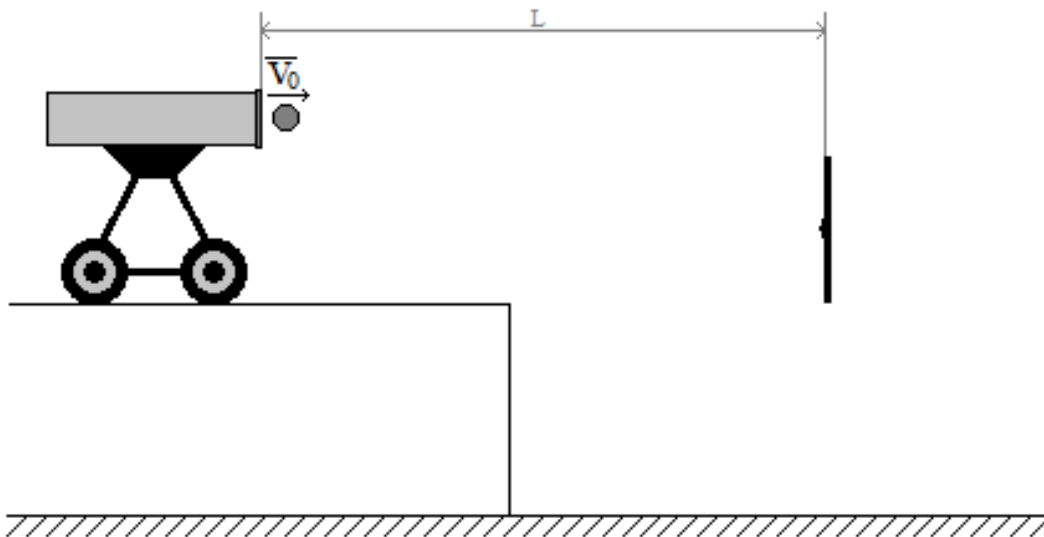
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2024-2025 учебный год
9 класс
Разбор задач

Пояснения к критериям оценивания.

Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий **конкретно** к данной задаче и записанный **верно**. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев.

Задача 1. (18 б.)

Имеется пушка, из которой можно стрелять одинаковыми маленькими шариками. При выстреле пушка сообщает шарiku фиксированную начальную скорость в горизонтальном направлении. Перед пушкой закреплена мишень, центр которой расположен ниже дула пушки. Пушка может перемещаться только по горизонтали. Выстрелив с расстояния $L_1 = 2$ м, попали на a выше центра мишени. Выстрелив с расстояния $L_2 = 4$ м, попали на a ниже центра мишени. С какого расстояния нужно стрелять, чтобы попасть ровно в центр мишени? a считается неизвестной величиной. Трением воздуха пренебречь.



Возможное решение:

Время полета в первом, втором и третьем (искомом) случае выразим через расстояние и начальную скорость

$$\begin{aligned}t_1 &= \frac{L_1}{v_0} \\t_2 &= \frac{L_2}{v_0} \\t_3 &= \frac{L_3}{v_0}\end{aligned}$$

Отклонение по вертикали также выразим через время полета. Обозначим за s расстояние по вертикали от дула до центра мишени.

$$s - a = \frac{gt_1^2}{2}$$

$$s + a = \frac{gt_2^2}{2}$$

$$s = \frac{gt_3^2}{2}$$

Вычтем первое и третье уравнение из второго и подставим время.

$$2a = \frac{g}{2v_0^2}(L_2^2 - L_1^2)$$

$$a = \frac{g}{2v_0^2}(L_2^2 - L_3^2)$$

$$L_2^2 - L_3^2 = \frac{L_2^2 - L_1^2}{2}$$

$$L_3 = \sqrt{\frac{L_2^2 + L_1^2}{2}} = 3,16 \text{ м}$$

Критерии оценивания:

Время полета выражено через расстояние в различных случаях.	4
Отклонение по вертикали выражено через время полета.	5
Неизвестные величины исключены из уравнений.	5
Вычислено искомое расстояние.	4

Задача 2. (20 б.) Расстояние от центра хрусталика глаза человека до сетчатки неизменно и равно 17 мм. Человек смотрит одним глазом на предмет, находящийся на расстоянии 1 м от глаза. Форма хрусталика подстраивается, чтобы получить четкое изображение предмета.

- 1) Во сколько раз изменится фокусное расстояние хрусталика, если на середине отрезка, соединяющего глаз и предмет, поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием 10 см таким образом, чтобы этот отрезок лежал на главной оптической оси линзы?
- 2) Во сколько раз изменится фокусное расстояние хрусталика, если на середине отрезка, соединяющего глаз и предмет, поместить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 10 см таким образом, чтобы этот отрезок лежал на главной оптической оси линзы?

Возможное решение:

- 1) Хрусталик глаза является собирающей линзой, создающей действительное изображение на сетчатке. Для простоты используем формулу тонкой линзы*. В случае, когда человек смотрит на предмет без линзы, формула тонкой линзы для хрусталика имеет вид

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_r}$$

где F_1 – фокусное расстояние хрусталика, $d_1 = 1$ м – расстояние от предмета до глаза, $f_r = 17$ мм – расстояние от центра хрусталика до сетчатки глаза, то есть от линзы до изображения.

Отсюда

$$F_1 = \frac{1}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_r}}$$

Если поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_l = 10$ см на расстоянии $d_l = \frac{d_1}{2} > F_l$ от предмета, то изображение предмета, создаваемое линзой будет действительным. Формула тонкой линзы будет иметь вид

$$\frac{1}{F_l} = \frac{1}{d_l} + \frac{1}{f_l}$$

где, f_l – расстояние от линзы до изображения.

Выразим f_l

$$f_l = \frac{1}{\frac{1}{F_l} - \frac{1}{d_l}} = \frac{1}{\frac{1}{F_l} - \frac{2}{d_1}}$$

Так как изображение действительное, оно будет находиться за линзой на расстоянии f_l от нее. То есть на расстоянии $d_2 = \frac{d_1}{2} - f_l$ от хрусталика глаза. Это изображение для хрусталика будет новым «предметом», и он изменит свое фокусное расстояние таким образом, чтобы изображение этого «предмета» формировалось на сетчатке. В этом случае формула тонкой линзы для хрусталика будет иметь вид

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_r}$$

где F_2 – фокусное расстояние хрусталика после помещения линзы, d_2 – расстояние от изображения линзы до хрусталика глаза. Выразим F_2

$$F_2 = \frac{1}{\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_r}}$$

Тогда искомое отношение

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_r}}{\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_r}} = \frac{d_2}{d_1} \frac{d_1 + f_r}{d_2 + f_r}$$

Подставим $d_2 = \frac{d_1}{2} - f_l = \frac{d_1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{F_l} - \frac{2}{d_1}} = \frac{d_1}{2} \frac{d_1 - 4F_l}{d_1 - 2F_l}$ и получим ответ

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{d_1 + f_r}{d_1 + 2f_r} \frac{d_1 - 2F_l}{d_1 - 4F_l} \approx 0,97$$

- 2) Рассеивающая линза имеет мнимый фокус и всегда дает мнимое изображение. Если поместить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F_l = 10$ см на расстоянии $d_l = \frac{d_1}{2}$ от предмета, то формула тонкой линзы будет иметь вид

$$-\frac{1}{F_l} = \frac{1}{d_l} - \frac{1}{f_l}$$

где, f_l – расстояние от линзы до изображения.

Выразим f_l

$$f_l = \frac{1}{\frac{1}{F_l} + \frac{1}{d_l}} = \frac{1}{\frac{1}{F_l} + \frac{2}{d_1}}$$

Так как изображение мнимое, оно будет находиться перед линзой на расстоянии f_l от нее. То есть на расстоянии $d_2 = \frac{d_1}{2} + f_l$ от хрусталика глаза. Несмотря на то, что изображение мнимое, хрусталик преобразует его в действительное изображение на сетчатке, поскольку является собирающей линзой. Это изображение для хрусталика будет новым «предметом», и он изменит свое фокусное расстояние таким образом, чтобы изображение этого «предмета» формировалось на сетчатке. В этом случае формула тонкой линзы для хрусталика будет иметь вид

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_r}$$

где F_2 – фокусное расстояние хрусталика после помещения линзы, d_2 – расстояние от изображения линзы до хрусталика глаза. Выразим F_2

$$F_2 = \frac{1}{\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_r}}$$

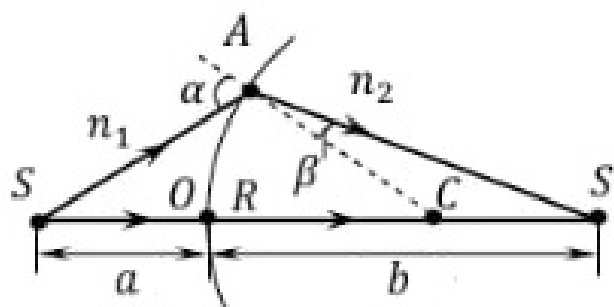
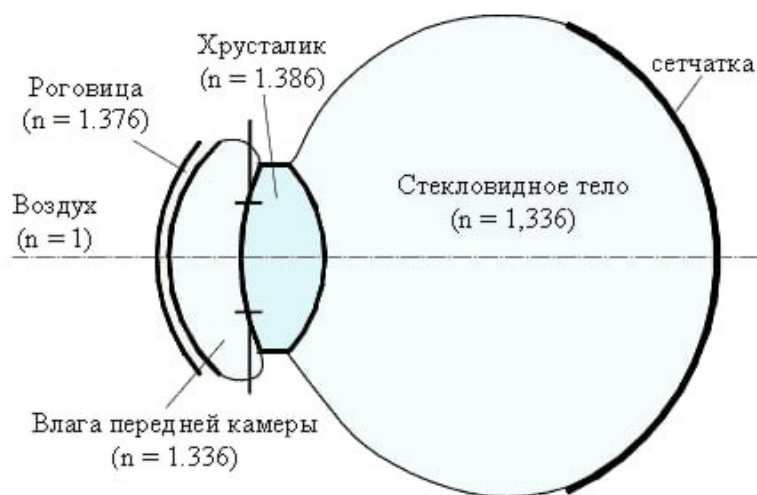
Учитывая выражение для F_1 , полученное в п. 1, запишем искомое соотношение

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{1}{\frac{d_1}{2} + \frac{1}{f_r}}}{\frac{1}{\frac{d_1}{2} + \frac{1}{f_r}}} = \frac{d_2}{d_1} \frac{d_1 + f_r}{d_2 + f_r}$$

Подставим $d_2 = \frac{d_1}{2} + f_l = \frac{d_1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{F_l} + \frac{2}{d_1}} = \frac{d_1}{2} \frac{d_1 + 4F_l}{d_1 + 2F_l}$ и получим ответ

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{d_1 + f_r}{d_1 + 2f_r} \frac{d_1 + 2F_l}{d_1 + 4F_l} \approx 0,99$$

*Если рассмотреть оптическую систему глаза более подробно, она состоит из сферической преломляющей поверхности, на которой происходит основное угловое отклонение луча, и хрусталика, который имеет переменную кривизну и осуществляет тонкую настройку фокусного расстояния. Поскольку оптическая плотность внутри глаза меняется не слишком сильно, можно дать грубую оценку хода лучей, ограничившись сферической преломляющей поверхностью (см. рисунок).



Для сферической поверхности, изображенной на рисунке, справедливо соотношение

$$\frac{n_2}{b} + \frac{n_1}{a} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Здесь b – расстояние от сетчатки глаза до роговицы. Если принять n_2 равным среднему показателю преломления глаза ($n_2 \approx 1,34$) и учесть, что $b = f_r + c$ (f_r – расстояние от центра хрусталика до сетчатки, c – расстояние от центра хрусталика до роговицы), то $f_{r\text{-}\text{эфф}} = \frac{b}{n_2} = \frac{f_r + c}{n_2} \approx 17 \text{ мм} \approx f_r$. Тогда первое слагаемое в левой части $\frac{n_2}{b} = \frac{1}{f_{r\text{-}\text{эфф}}}$.

Расстояние от предмета до центра хрусталика $d = a + c$ в силу того, что $c \ll a$, можно считать $d \approx a$. Показатель преломления $n_1 = 1$. Отсюда второе слагаемое левой части $\frac{n_1}{a} = \frac{1}{d}$.

Тогда

$$\frac{1}{f_{r\text{-}\text{эфф}}} + \frac{1}{d} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Учитывая что $f_{r\text{-}\text{эфф}} \ll d$, фокусное расстояние F может быть грубо оценено как $\frac{n_2}{F} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ ($d \rightarrow \infty, \frac{1}{d} \rightarrow 0$), то есть $F_{\text{эфф}} = \frac{F}{n_2} = \frac{R}{n_2 - n_1}$.

Таким образом, выражение приобретает вид формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{f_{r\text{-}\text{эфф}}} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F_{\text{эфф}}}$$

Влияние хрусталика грубо оценивается как изменение параметра $F_{\text{эфф}}$. В данной задаче рассматривается отношение фокусных расстояний для различных случаев, поэтому множитель n_2 в правой части $\frac{1}{F_{\text{эфф}}} = \frac{n_2}{F}$ не влияет на конечный результат.

В офтальмологии для описания аккомодации (способность глаза подстраивать кривизну хрусталика для получения четкого изображения предметов, находящихся на различных расстояниях от него), в основном, используется формула тонкой линзы.

Критерии оценивания:

Корректно записана формула тонкой линзы для глаза и найдено фокусное расстояние хрусталика.	4
Найдено изображение предмета, создаваемого дополнительной собирающей линзой.	4
Найдено новое фокусное расстояние хрусталика и рассчитано искомое отношение для вопроса 1).	4
Найдено изображение предмета, создаваемого дополнительной рассеивающей линзой.	4
Найдено новое фокусное расстояние хрусталика и рассчитано искомое отношение для вопроса 2).	4

Задача 3. (20 б.) Электрический нагреватель помещен в закрытый сосуд, заполненный веществом с высокой теплопроводностью, и на него подано некоторое напряжение питания. При этом установилось некоторое значение температуры сосуда с нагревательным элементом и веществом в нем $2T_0$. Температура окружающей среды постоянна и равна T_0 . Сопротивление нагревательного элемента прямо пропорционально его абсолютной температуре. Температура системы и окружающей среды в условиях указана в кельвинах.

Во сколько раз нужно изменить напряжение питания, если в сосуде разместить N параллельно соединенных таких нагревательных элементов, чтобы в сосуде установилась температура $3T_0$?

Возможное решение:

Рассмотрим случай с одним нагревателем.

Пусть U_1 – напряжение питания, поданное на нагревательный элемент, T_1 – температура, установившаяся в сосуде.

По закону Джоуля-Ленца тепловая мощность, выделяемая на нагревателе

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I^2 R = \frac{U_1^2}{R(T_1)} = \frac{U_1^2}{\beta T_1}$$

где β – коэффициент пропорциональности между сопротивлением элемента и температурой.

По закону Ньютона-Рихмана тепловая мощность, отдаваемая сосудом в окружающую среду

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \alpha S(T_1 - T_0)$$

где α – коэффициент теплоотдачи вещества в сосуде окружающей среде через стенки сосуда, S – площадь поверхности сосуда.

Температура T в сосуде будет установившейся, когда эти мощности будут равны

$$\alpha S(T_1 - T_0) = \frac{U_1^2}{\beta T_1}$$

Тогда

$$U_1^2 = \alpha \beta S T_1 (T_1 - T_0) = 2 T_0^2 \alpha \beta S$$

Пусть U_2 – напряжение питания, поданное на N параллельно соединенных нагревательных элементов, T_2 – температура, установившаяся в сосуде в этом случае.

При параллельном соединении N нагревателей напряжение на каждом из них будет равно напряжению питания U_2 , а общая тепловая мощность, выделяемая ими увеличится в N раз. Тогда можем записать

$$P = N \frac{U_2^2}{\beta T_2} = \alpha S (T_2 - T_0)$$

Или

$$N U_2^2 = \alpha \beta S T_2 (T_2 - T_0) = 6 T_0^2 \alpha \beta S$$

Тогда можно записать

$$3 U_1^2 = N U_2^2$$

Отсюда получим

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{3}{N}}$$

Критерии оценивания:

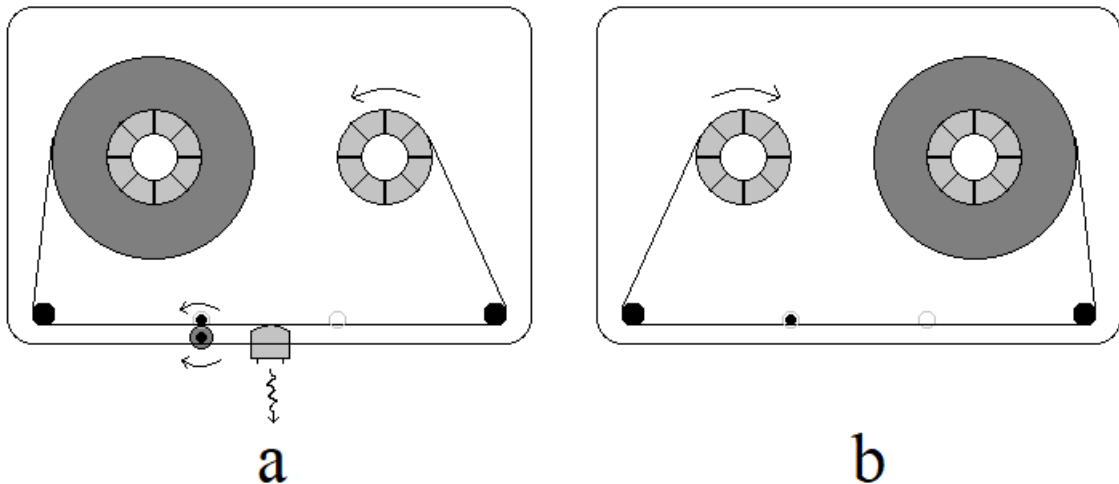
Записан закон Джоуля-Ленца для нагревателя в исходном состоянии.	4
Мощность тепловых потерь выражена через разность температур по закону Ньютона - Райхмана.	4
Условие постоянства температуры.	4
Тепловая мощность в случае N элементов.	4
Найдено искомое отношение.	4

Задача 4. (20 б.) Относительно недавно был популярен такой носитель информации, как аудиокассета. Она представляла собой плоскую пластиковую коробочку с закрепленными внутри двумя одинаковыми катушками, к которым была прикреплена магнитная лента – тонкая пластиковая лента с нанесенным на нее слоем специального материала, способного в течение длительного времени сохранять намагниченность. При вращении одной из катушек лента перематывалась на нее с другой катушки. Также лента была натянута на два маленьких ролика, которые располагались в нижней части кассеты. В нижней части кассеты были отверстия для рабочих частей воспроизводящего устройства – магнитофона.

В режиме воспроизведения (рисунок а) к ленте подводилась магнитная головка, считывавшая намагниченность, лента зажималась между двумя валиками, задававшими скорость ее движения и тянувшими ленту с ведомой катушки. На ведущую катушку лента натягивалась двигателем лентопротяжного механизма. Электрический сигнал с магнитной головки преобразовывался магнитофоном в звуковой.

В режиме перемотки (рисунок б) лента двигалась только за счет двигателя, задававшего частоту оборотов ведущей катушки. Лента перематывалась с ведомой катушки на ведущую.

- 1) Найдите зависимость скорости движения ленты от времени в режиме перемотки, если период (время, в течение которого совершается один оборот) вращения ведущей катушки T . Радиус катушки без ленты r_0 , толщина ленты $d \ll r_0$. В начальный момент времени ведущая катушка была полностью размотана.
- 2) Найдите зависимость периодов ведущей и ведомой катушек в режиме воспроизведения от времени, если задана скорость движения ленты v . Радиус катушки без ленты r_0 , радиус катушки с полностью намотанной на нее лентой R , толщина ленты $d \ll r_0$. В начальный момент времени ведущая катушка была полностью размотана.



Возможное решение:

- 1) Так как толщина ленты мала по сравнению с радиусом катушки, при ее намотке за один период вращения радиус катушки мало изменится по сравнению с текущим значением, поэтому можно приблизительно считать, что за один оборот на ведущую катушку наматывается кусок ленты длиной $2\pi r(t)$, где $r(t)$ – радиус катушки в текущий момент времени t . Тогда скорость ленты в момент времени t

$$v(t) = \frac{2\pi r(t)}{T}$$

За период T радиус катушки увеличивается на толщину ленты d , поэтому изменение радиуса катушки в единицу времени

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d}{T}$$

Если $\Delta r = r(t) - r_0$, а $\Delta t = t - t_0$, где $t_0 = 0$ – начальный момент времени, когда радиус ведущей катушки был равен r_0 , то

$$r(t) = r_0 + d \frac{t}{T}$$

Тогда для скорости ленты получим

$$v(t) = \frac{2\pi}{T} \left(r_0 + d \frac{t}{T} \right)$$

- 2) Найдем зависимость периода вращения ведущей катушки T_1 от времени. Пусть в течение времени Δt на катушку наматывается кусок ленты длиной Δl . Тогда площадь

ее боковой поверхности будет увеличиваться на величину $\Delta l \cdot d$. Запишем изменение площади боковой поверхности ведущей катушки в единицу времени

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\Delta t} d = vd$$

Тогда

$$S_1(t) = S_{10} + vd \cdot t$$

где S_{10} – площадь боковой поверхности ведущей катушки в начальный момент времени.

Но $S_1(t) = \pi(r_1(t))^2$, $S_{10} = \pi r_0^2$, тогда

$$r_1(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{vd}{\pi} t}$$

В каждый момент времени скорость ленты

$$v = \frac{2\pi r_1(t)}{T_1(t)}$$

Из последних двух уравнений получим зависимость периода вращения ведущей катушки от времени

$$T_1(t) = \frac{2}{v} \sqrt{(\pi r_0)^2 + \pi v d \cdot t}$$

Рассуждая аналогично, можно получить зависимость периода вращения ведомой катушки T_2 от времени, с той разницей, что в начальный момент времени ее радиус R , а площадь ее боковой поверхности с течением времени будет уменьшаться

$$\frac{\Delta S_2}{\Delta t} = -\frac{\Delta l}{\Delta t} d = -vd$$

Зависимость периода вращения ведомой катушки от времени

$$T_2(t) = \frac{2}{v} \sqrt{(\pi R)^2 - \pi v d \cdot t}$$

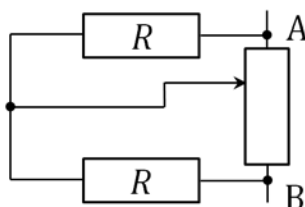
Критерии оценивания:

Скорость ленты выражена через радиус катушки.	3
Изменение радиуса катушки выражено через толщину ленты и период.	3
Найдена зависимость радиуса катушки от времени.	3
Найдена зависимость скорости ленты от времени.	2
Изменение площади боковой поверхности выражено через скорость и толщину ленты.	3
Найдена зависимость радиуса катушки от времени.	3
Найдена зависимость периодов обращения катушек от времени.	3

Задача 5. (22 б.) На рисунке изображена схема участка электрической цепи, состоящей из резисторов и реостата. R – неизвестное постоянное сопротивление. Минимальное сопротивление реостата равно 0, максимальное R_0 , R_0 также считается неизвестной величиной. Сопротивлением контактов и проводов пренебречь.

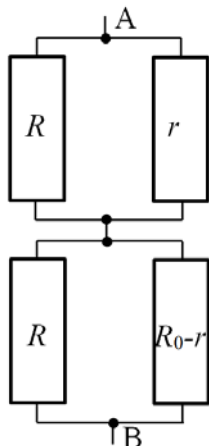
1) Найдите отношение m максимального к минимальному сопротивлению между клеммами А и В, если отношение $R/R_0 = n$.

2) В каких пределах может меняться m в зависимости от n ?



Возможное решение:

Изобразим эквивалентную схему. r - сопротивление верхней части реостата.



Запишем полное сопротивление участка цепи

$$R_{AB} = \frac{Rr}{R+r} + \frac{R(R_0-r)}{R+R_0-r}$$

Запишем формулу в более симметричной форме. Для этого заменим $r = x + R_0/2$

$$R_{AB} = \frac{R\left(\frac{R_0}{2} + x\right)}{R + \frac{R_0}{2} + x} + \frac{R\left(\frac{R_0}{2} - x\right)}{R + \frac{R_0}{2} - x}$$

Приводим к общему знаменателю

$$R_{AB} = 2R \frac{R_0^2 + 2R_0R - 4x^2}{R_0^2 + 4R_0R + 4R^2 - 4x^2}$$

Добавим и отнимем $2R_0R + 4R^2$ в числителе

$$R_{AB} = 2R \left(1 - \frac{2R_0R + 4R^2}{R_0^2 + 4R_0R + 4R^2 - 4x^2} \right)$$

Учитывая область определения x , легко видеть, что знаменатель дроби принимает максимальное значение при $x = 0$. При этом общее сопротивление также принимает максимальное значение*. Минимальное значение общего сопротивления достигается на границе интервала, при $x = \mp R_0/2$

$$R_{ABmax} = 2R \left(1 - \frac{2\frac{R}{R_0} + 4\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}{1 + 4\frac{R}{R_0} + 4\left(\frac{R}{R_0}\right)^2} \right) = 2R \left(\frac{1 + 2n}{1 + 4n + 4n^2} \right) = R \left(\frac{2}{1 + 2n} \right)$$

$$R_{ABmin} = 2R \left(1 - \frac{\frac{R}{R_0} + 2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2}{2 \frac{R}{R_0} + 2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2} \right) = R \left(\frac{1}{1+n} \right)$$

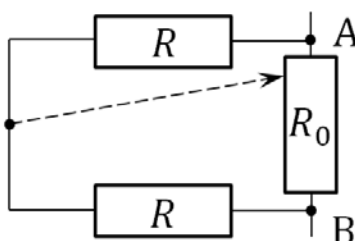
$$\frac{R_{ABmax}}{R_{ABmin}} = m = \frac{2+2n}{1+2n} = \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}$$

Величина m принимает значения от 1 до 2.

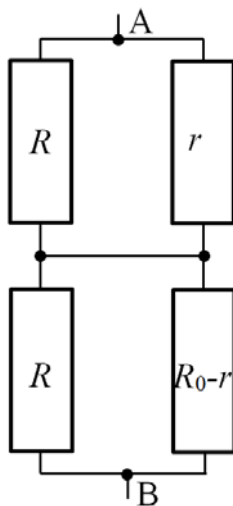
*Этот факт можно доказать почти без вычислений. Сопротивление схемы на рисунке без перемычки равно

$$R_{AB} = \frac{2RR_0}{2R + R_0}$$

Добавление перемычки (соединенной с ползунком реостата), не может увеличить сопротивление схемы, даже если перемычка будет иметь конечное сопротивление. Но если ток по перемычке не будет течь, то и на сопротивление она не повлияет.



Изобразим эквивалентную схему r - сопротивление верхней части реостата.



Ток через перемычку не потечет, если выполнено условие

$$1 = \frac{r}{R_0 - r}$$

$$r = \frac{R_0}{2}$$

Критерии оценивания:

Записано полное сопротивление участка цепи.

Любым способом найдено положение ползунка реостата, отвечающего максимальному сопротивлению.	8
Найдено минимальное сопротивление.	4
Найдено отношение максимального и минимального сопротивлений m .	3
Найден диапазон значений m .	3