Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2025-2026 учебный год (решения)
10 класс

Пояснения к критериям оценивания

Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий конкретно к данной задаче и записанный верно. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев. Баллы за правильный ответ выставляются только при наличии корректного решения.

Задание 1. (20 б.)

На пассажирском сиденье полноприводной машины укреплена наклонная плоская доска под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонтали. Если ускорение автомобиля, направленное вперед, будет достаточно велико, телефон не будет соскальзывать с этой наклонной плоскости, если перестать его придерживать. Коэффициент трения между телефоном и доской равен $\mu = 0{,}5$. Примем для простоты, что мощность автомобиля с учетом потерь во внутренних узлах может меняться под контролем водителя от 0 до $P_{\max} = 250$ кВт вне зависимости от скорости. Снаряженная масса автомобиля с водителем составляет $M = 1{,}5$ т. Коэффициент трения между колесами и дорогой $\mu_d = 0{,}9$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха и прочими аэродинамическими силами пренебречь.

а) Какой интервал времени телефон не будет соскальзывать, если стартовать из состояния покоя, поддерживая постоянно максимальную мощность автомобиля, разгоняясь по прямой горизонтальной дороге? Подразумевается, что телефон прекращают поддерживать, когда автомобиль начинает ускоряться, с этого же момента начинается отсчет времени.

б) Какой максимальный интервал времени можно непрерывно удерживать таким способом телефон от соскальзывания вниз, разгоняясь по прямой горизонтальной дороге?

Возможное решение

Минимальное ускорение для удержания телефона

Рассмотрим телефон в неинерциальной системе отсчета, связанной с автомобилем. На телефон действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила инерции $-m\vec{a}$ (направлена назад, так как автомобиль ускоряется вперед), сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$, направленная вверх вдоль плоскости (против возможного соскальзывания вниз). Ось x направим вверх вдоль наклонной плоскости, ось y — перпендикулярно плоскости вверх.

Уравнения равновесия:

$$x: \quad -mg\sin\alpha + ma\cos\alpha + f_{\text{тр}} = 0,$$
$$y: \quad -mg\cos\alpha - ma\sin\alpha + N = 0.$$

Условие отсутствия проскальзывания: $f_{\text{тр}} \le \mu N$. Подставляя $f_{\text{тр}}$ и N, получаем неравенство:

$$mg\sin\alpha - ma\cos\alpha \le \mu(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha),$$

откуда

$$a \ge g\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Подставляя $\alpha = 60^\circ$, $\mu = 0{,}5$, $g = 10$ м/с^2:

$$a_{\min} = 10 \cdot \frac{\sin 60^\circ - 0{,}5\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ + 0{,}5\sin 60^\circ} \approx 10 \cdot \frac{0{,}6160}{0{,}9330} \approx 6{,}60 \text{ м/с}^2.$$

Ограничение ускорения силой сцепления колес

Поскольку автомобиль полноприводной, максимальная сила тяги ограничена только сцеплением всех колес с дорогой. Сила трения покоя со стороны является единственной внешней к автомобилю силой, дающей вклад в горизонтальное ускорение. Она не может превышать силу трения скольжения. Для горизонтальной дороги получаем:

$$F_{\text{тяги}}^{\max} = \mu_d M g.$$

Соответствующее максимальное ускорение:

$$a_{\max} = \frac{F_{\text{тяги}}^{\max}}{M} = \mu_d g = 0{,}9 \cdot 10 = 9{,}0 \text{ м/с}^2.$$

Так как $a_{\min} < a_{\max}$, удержание телефона принципиально возможно.

Разгон с постоянной максимальной мощностью

При движении с **полезной** мощностью P, когда сила сонаправлена со скоростью, выполняется соотношение $P = Fv$. Ускорение в этом случае

$$a = \frac{F}{M} = \frac{P}{Mv}.$$

Но на начальном этапе максимальное ускорение ограничено величиной $a_{\max}$ (из-за ограниченной силы). Избыток мощности расходуется на нагрев при пробуксовке колес.
Найдем скорость v_1, при которой это условие $Ma_{\max}v \le P_{\max}$ перестает выполняться:

$$Ma_{\max}v_1 = P_{\max}$$

$$v_1 = \frac{P_{\max}}{Ma_{\max}} = \frac{250 \cdot 10^3}{1500 \cdot 9{,}0}\text{м/с} \approx 18{,}52 \text{ м/с}.$$

Время разгона до v_1 с постоянным ускорением $a_{\max}$:

$$t_1 = \frac{v_1}{a_{\max}} \approx \frac{18{,}52}{9{,}0} \approx 2{,}058 \text{ с}.$$

Далее ускорение уменьшается: $a = P_{\max}/(Mv)$. Телефон начнет соскальзывать, когда a станет меньше $a_{\min}$. Определим скорость v_2, при которой $a = a_{\min}$:

$$\frac{P_{\max}}{Mv_2} = a_{\min}$$

$$v_2 = \frac{P_{\max}}{Ma_{\min}} \approx \frac{250 \cdot 10^3}{1500 \cdot 6{,}60}\text{м/с} \approx 25{,}24 \text{ м/с}.$$

Время разгона от v_1 до v_2 при постоянной мощности можно найти, приравняв изменение кинетической энергии автомобиля к совершенной двигателем работе:

$$\frac{M(v_2^2 - v_1^2)}{2} = P_{\max}(t_2 - t_1).$$

Отсюда:

$$t_2 - t_1 = \frac{M}{2P_{\max}}(v_2^2 - v_1^2) \approx 0{,}883 \text{ с}$$

Общее время удержания при разгоне с постоянной максимальной мощностью:

$$t_a = t_1 + (t_2 - t_1) \approx 2{,}058 + 0{,}883 \approx 2{,}94 \text{ с}.$$

Максимальный интервал времени удержания

Чтобы удерживать телефон максимально долго, нужно поддерживать ускорение постоянным и равным $a_{\min}$ до тех пор, пока это позволяет мощность. Как только требуемая мощность превысит $P_{\max}$, дальнейшее поддержание ускорения $a_{\min}$ станет невозможным. Критическая скорость уже была найдена ранее:

$$v_2 = \frac{P_{\max}}{Ma_{\min}} \approx 25{,}24 \text{ м/с.}$$

Время разгона от 0 до v_2 с постоянным ускорением $a_{\min}$:

$$t_{\max} = \frac{v_2}{a_{\min}} \approx \frac{25{,}24}{6{,}60} \approx 3{,}82 \text{ с.}$$

После достижения v_2 мощность $P_{\max}$ уже недостаточна для поддержания ускорения $a_{\min}$, поэтому телефон начнет соскальзывать.

Критерии оценивания

Критерий	**Баллы**
Уравнение движения / равновесия для телефона с учетом ускорения автомобиля	3
Условие отсутствия проскальзывания и получение формулы для минимального ускорения $a_{\min}$	2
Численное значение минимального необходимого ускорения	1
Учет ограничения ускорения силой сцепления колес и расчет максимального ускорения	2
Анализ разгона с постоянной максимальной мощностью: определение участков ограничения ускорения силой трения и мощностью	3
Расчет скорости перехода v_1 и времени разгона с максимальным ускорением $a_{\max}$	2
Определение скорости v_2, при которой $a = a_{\min}$, и времени разгона от v_1 до v_2	1
Определение общего времени для пункта a)	2
Максимальное время удержания достигается при постоянном ускорении $a_{\min}$	2
Расчет максимального времени удержания (пункт b)	2

Задание 2. (20 б.)

Очень длинный кабель представляет собой две коаксиальные (с совпадающей осью) цилиндрические медные жилы, разделенные слоем изоляции. Внутренняя жила представляет из себя цилиндр, внешняя – цилиндрический слой. Внешний радиус кабеля подобран таким образом, что площади поперечного сечения жил равны. При протекании тока I_0 через каждую из жил, температура внутренней жилы постоянна по объему с хорошей точностью и равна 45°C, температура внешней жилы также почти постоянна по объему и равна 35°C. При токе $2I_0$, протекающем по каждой жиле, внутренняя жила нагревается до 90°C.

а) Найдите температуру внешней жилы в этом случае (ток $2I_0$ в обеих жилах).

б) Найдите температуру обеих жил при протекании тока $3I_0$ в каждой жиле.

в) Найдите температуру обеих жил, когда ток $4I_0$ течет по внутренней жиле, а по внешней не течет вовсе.

Зависимостью сопротивления меди от температуры в данной задаче следует пренебречь. Температура внешней среды предполагается постоянной и не зависящей от тока в кабеле.

Возможное решение

Тепловая модель

Введем обозначения: T_1 – температура внутренней жилы, T_2 – температура внешней жилы, T_0 – температура окружающей среды (постоянна), R – электрическое сопротивление единицы длины каждой жилы (жилы имеют равные сечения, материал одинаков, зависимостью от температуры пренебрегаем), $R_{т1}$ – тепловое сопротивление между внутренней и внешней жилой (на единицу длины), $R_{т2}$ – тепловое сопротивление между внешней жилой и окружающей средой (на единицу длины).

Мощность джоулева тепла, выделяемая на единицу длины:

$$P_1 = I_1^2 R, \quad P_2 = I_2^2 R.$$

Тепловой баланс устанавливается из условия, что все тепло, выделяемое во внутренней жиле, передается через изоляцию к внешней жиле, а суммарное тепло от внутренней и внешней жил отводится от внешней жилы в окружающую среду:

$$P_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_{т1}}, \tag{1}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{T_2 - T_0}{R_{т2}}. \tag{2}$$

Из условия при токе I_0 ($I_1 = I_2 = I_0$) $T_1 = 45°\text{C}$, $T_2 = 35°\text{C}$. Из (1):

$$I_0^2 R = \frac{45°\text{C} - 35°\text{C}}{R_{т1}} = \frac{10°\text{C}}{R_{т1}} \tag{3}$$

$$R_{т1} = \frac{10°\text{C}}{I_0^2 R}. \tag{4}$$

Из (2):

$$2I_0^2 R = \frac{35°\text{C} - T_0}{R_{т2}} \tag{5}$$

$$R_{т2} = \frac{35°\text{C} - T_0}{2I_0^2 R}. \tag{6}$$

При токе $2I_0$ ($I_1 = I_2 = 2I_0$) известно, что $T_1' = 90°\text{C}$. Подставим токи в (1):

$$(2I_0)^2 R = \frac{90°\text{C} - T_2'}{R_{т1}}$$

$$4I_0^2 R = \frac{90°\text{C} - T_2'}{10/(I_0^2 R)}$$

$$90 - T_2' = 4I_0^2 R \cdot \frac{10°\text{C}}{I_0^2 R} = 40°\text{C}.$$

Отсюда температура внешней жилы:

$$T_2' = 90°\text{C} - 40°\text{C} = 50°\text{C}. \quad \text{(ответ на пункт а)}$$

Определим теперь температуру окружающей среды T_0, она будет нужна в дальнейшем. Из (2) для этого случая:

$$4I_0^2 R + 4I_0^2 R = \frac{T_2' - T_0}{R_{т2}}$$

Подставим выражение для $R_{т2}$ из (6):

$$8I_0^2 R = \frac{2I_0^2 R(50°\text{C} - T_0)}{35°\text{C} - T_0}.$$

$$8 = \frac{2(50°\text{C} - T_0)}{35°\text{C} - T_0}$$
$$140°\text{C} - 4T_0 = 50°\text{C} - T_0$$
$$T_0 = 30°\text{C}.$$

Тогда из (6):

$$R_{\text{т}2} = \frac{35°\text{C} - 30°\text{C}}{2I_0^2 R} = \frac{5°\text{C}}{2I_0^2 R}.$$

Ток $3I_0$ (пункт б)

При $I_1 = I_2 = 3I_0$:

$$P_1 = P_2 = 9I_0^2 R.$$

Из (1):

$$9I_0^2 R = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{т}1}}, \tag{7}$$

$$T_1 - T_2 = 9I_0^2 R \cdot \frac{10}{I_0^2 R} = 90°\text{C}. \tag{8}$$

Из (2):

$$9I_0^2 R + 9I_0^2 R = \frac{T_2 - T_0}{R_{\text{т}2}},$$
$$T_2 - 30°\text{C} = 18I_0^2 R \cdot \frac{5}{2I_0^2 R} = 45°\text{C}.$$

Отсюда:

$$T_2 = 30°\text{C} + 45°\text{C} = 75°\text{C}.$$

Из (8):

$$T_1 = T_2 + 90°\text{C} = 75°\text{C} + 90°\text{C} = 165°\text{C}.$$

Ответ для пункта (б): $T_1 = 165°\text{C},\ T_2 = 75°\text{C}$.

Ток $4I_0$ только во внутренней жиле (пункт в)

При $I_1 = 4I_0$, $I_2 = 0$:

$$P_1 = (4I_0)^2 R = 16I_0^2 R, \quad P_2 = 0.$$

Из (1):

$$16I_0^2 R = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{т}1}} \tag{9}$$

$$T_1 - T_2 = 16I_0^2 R \cdot \frac{10°\text{C}}{I_0^2 R} = 160°\text{C}. \tag{10}$$

Теперь все тепло, выделяемое во внутренней жиле, передается внешней и отводится в среду, поэтому уравнение (2) принимает вид:

$$P_1 + 0 = \frac{T_2 - T_0}{R_{\text{т}2}}$$
$$T_2 - 30°\text{C} = 16I_0^2 R \cdot \frac{5}{2I_0^2 R} = 40°\text{C}.$$

Отсюда:

$$T_2 = 30°\text{C} + 40°\text{C} = 70°\text{C}.$$

Из (10):

$$T_1 = T_2 + 160°\text{C} = 70°\text{C} + 160°\text{C} = 230°\text{C}.$$

Ответ для пункта (в): $T_1 = 230°\text{C},\ T_2 = 70°\text{C}$.

Критерии оценивания

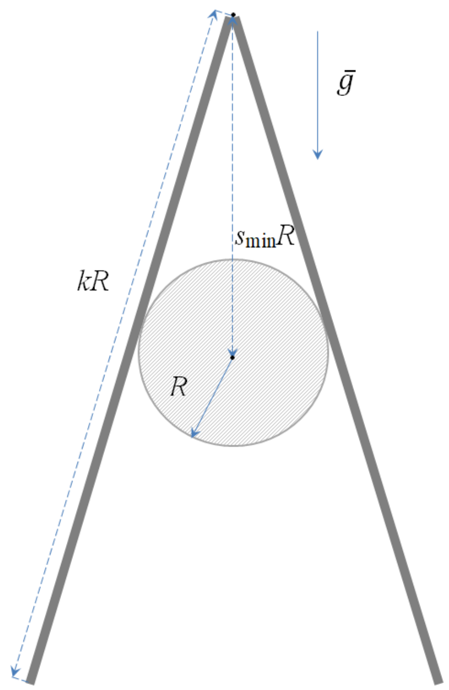
Критерий	Баллы
Уравнения теплового баланса для жил	4
Тепловая мощность тока в жилах	2
Связь тепловых сопротивлений (или связанных величин), известных температур, тока и сопротивления	2
Температура окружающей среды T_0 найдена или выражена через известные температуры	2
Ответ на пункт а) с обоснованием	2
Ответ на пункт б) с обоснованием	4
Ответ на пункт в) с обоснованием	4

Задание 3. (20 б.)

Две одинаковые прямые (недеформируемые) однородные доски скреплены за края дверной петлей. Ось петли стационарно закреплена горизонтально и позволяет доскам висеть вертикально или свободно отклоняться на угол не больше 90° от вертикали. Трения в петле нет. Между досками можно поместить цилиндрический обрезок бревна радиуса R (также недеформируемый). Длина досок kR, масса каждой доски равна массе обрезка, масса и размер петли пренебрежимо малы. Было обнаружено, что минимальное расстояние от оси петли до оси обрезка бревна, зажатого в положении равновесия между досками, равно $s_{\min}R$. Обрезок в этом случае касается досок горизонтальными отрезками на боковой поверхности, плоскость крышек цилиндрического обрезка вертикальна. Для простоты расчетов пренебрегите толщиной досок по сравнению с R.

а) Найдите коэффициент трения μ между обрезком бревна и досками при $k = 50$ и $s_{\min} = \sqrt{5}$.

б) Дайте качественное описание ограничений, которые накладываются на расстояние от оси петли до оси цилиндра для достижения равновесия в описанной системе при заданных k и μ. Указание: Подставьте в полученное выражение для коэффициента трения вместо $s_{\min}$ другие значения в окрестности.



Возможное решение

Геометрия системы

Из симметрии системы ось цилиндра C находится на одной вертикали с осью петли O. Расстояние $OC = sR$. Доски касаются цилиндра в точках T. Так как касание происходит по горизонтальным отрезкам (параллельным оси цилиндра), в сечении плоскостью, перпендикулярной оси петли, видим, что линии досок касаются окружности радиуса R. Следовательно, $CT \perp OT$. В треугольнике OCT угол при T прямой.

Обозначим угол между доской OT и вертикалью OC как θ. Тогда:

$$\sin\theta = \frac{CT}{OC} = \frac{R}{sR} = \frac{1}{s}, \quad \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} = \frac{\sqrt{s^2-1}}{s}.$$

Также:

$$OT = \sqrt{OC^2 - CT^2} = \sqrt{(sR)^2 - R^2} = R\sqrt{s^2-1}.$$

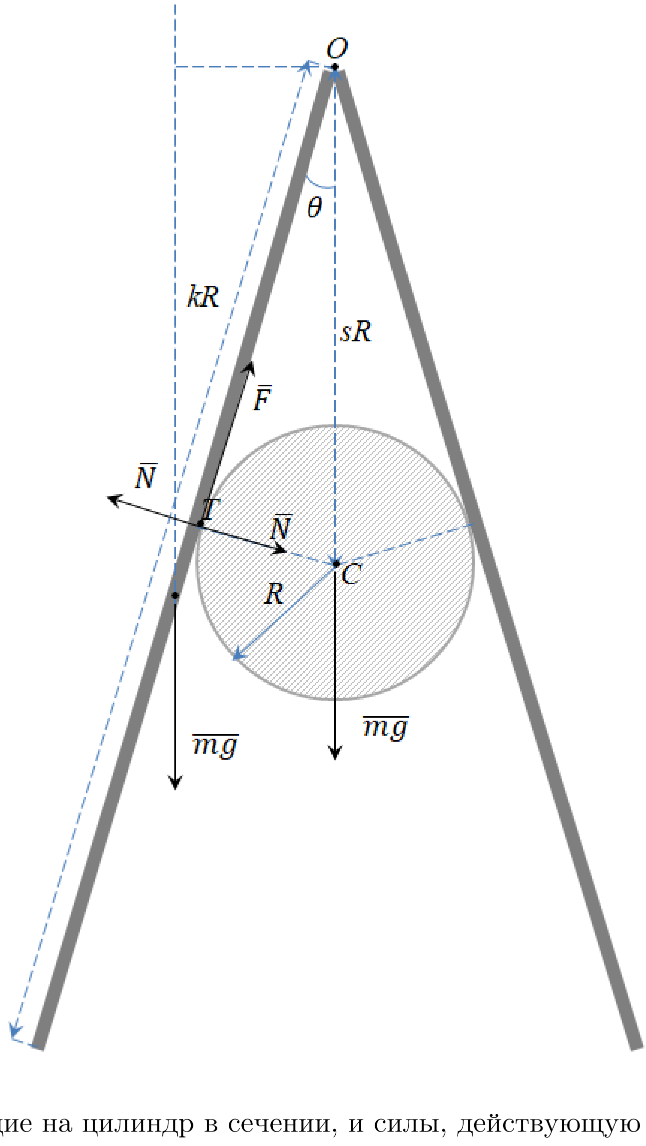


Рис. 1: Силы, действующие на цилиндр в сечении, и силы, действующую на левую доску, создающие ненулевой момент

Баланс моментов сил, действующих на доску

Рассмотрим левую доску. На нее действуют: Сила тяжести mg, приложенная в центре доски (на расстоянии $L/2 = kR/2$ от O), нормальная сила со стороны цилиндра N, приложенная в точке T

и направленная перпендикулярно доске, реакция в петле O (не создает момента, так как трение в петле отсутствует), сила трения со стороны цилиндра не создает момента, так как имеет нулевое плечо (не указана на рисунке). Составим уравнение моментов относительно оси петли O:

$$sNR\cos\theta = mg\frac{kR}{2}\sin\theta.$$

Подставляя $\sin\theta$ и $\cos\theta$, получаем:

$$N\sqrt{s^2-1} = mg\frac{k}{2s},$$

откуда:

$$N = \frac{mgk}{2s\sqrt{s^2-1}}. \tag{11}$$

Равновесие цилиндра

На цилиндр действуют:

- Сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз)
- Две нормальные силы $\vec{N}$ от досок
- Две силы трения $\vec{F}$ (на каждом контакте), направленные вверх вдоль досок

Разложим силы на составляющие для левой доски (для правой — симметрично). Нормальная сила N, действующая на цилиндр, направлена к центру C, ее вертикальная составляющая (ось y направлена вертикально вверх):

$$N_y = -N\sin\theta.$$

Сила трения F направлена вверх вдоль доски, ее вертикальная составляющая:

$$F_y = F\cos\theta.$$

Условие равновесия цилиндра по вертикали:

$$2F\cos\theta = mg + 2N\sin\theta.$$

В положении, когда цилиндр удерживается на грани проскальзывания, сила трения максимальна: $F = \mu N$. Подставляем:

$$2\mu N\cos\theta = mg + 2N\sin\theta. \tag{12}$$

Вывод формулы для коэффициента трения

Из уравнения (12) выразим μ:

$$\mu = \frac{mg}{2N\cos\theta} + \tan\theta.$$

Подставляем выражение для N из (11) и тригонометрические соотношения:

$$\mu(s) = \frac{s^2}{k} + \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}. \tag{13}$$

Эта формула дает минимальный коэффициент трения μ, необходимый для удержания цилиндра на расстоянии sR от петли без проскальзывания.

Ответ на вопрос а)

При $k = 50$ и $s_{\min} = \sqrt{5}$ имеем

$$\mu = \frac{5}{50} + \frac{1}{2} = 0.1 + 0.5 = 0.6.$$

Ответ на вопрос б)

Рассмотрим несколько значений s, близких к $s_{\min}$:

- При $s = 2.0$: $\mu(2) = \dfrac{4}{50} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.657$.
- При $s = \sqrt{5}$: $\mu = 0.6$.
- При $s = 2.5$: $\mu(2.5) \approx 0.561$.
- При $s = 4$: $\mu(4) \approx 0.578$.
- При $s = 5$: $\mu(5) \approx 0.704$.

Как можно видеть, функция $\mu(s)$ имеет минимум не при $s_{\min}$, а при некотором $s_0 > s_{\min}$, и $s_{\min}$ соответствует одному из корней уравнения $\mu(s) = \mu_0$. По условию – меньшему.

Можно (не обязательно для получения максимальной оценки) исследовать функцию $\mu(s)$ на экстремум.

Найдем производную $\mu(s)$ по s:

$$\mu'(s) = \frac{2s}{k} - \frac{s}{(s^2-1)^{3/2}}.$$

Приравнивая нулю, получаем уравнение для точки минимума s_0:

$$(s_0^2 - 1)^{3/2} = \frac{k}{2}.$$

$$s_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^{2/3} + 1}.$$

При $k = 50$: $s_0 \approx \sqrt{9.55} \approx 3.09$.

$$\mu(s_0) \approx \frac{9.55}{50} + \frac{1}{\sqrt{8.55}} \approx 0.533.$$

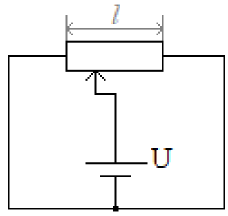
При заданных k и μ равновесие возможно только для расстояний s, лежащих в некотором интервале $[s_1, s_2]$, где s_1 — минимальное расстояние, s_2 — максимальное. При $s < s_1$ или $s > s_2$ требуемый коэффициент трения превышает имеющийся, и цилиндр начнет проскальзывать. Значения s_1 и s_2 находятся из уравнения $\mu(s) = \mu$, где $\mu(s)$ задается формулой (13). Существование такого интервала обусловлено тем, что функция $\mu(s)$ имеет минимум при некотором $s_0 > 1$ и стремится к бесконечности при $s \to 1$ и при $s \to +\infty$.

Критерии оценивания

Критерий	Баллы
Описание геометрии системы (связь s, R и углов, если они используются)	1
Равновесие моментов сил и получение выражения для силы нормальной реакции опоры	4
Условие равновесия цилиндра по вертикали	4
Общая формула для коэффициента трения $\mu(s)$	4
Значение μ для заданных числовых данных в пункте а)	2
Анализ функции $\mu(s)$: вычисление значений при близких s, исследование поведения (минимум, пределы)	2
Качественное описание ограничений на s при заданных k и μ: существование интервала равновесия	3

Задание 4. (20 б.)

В цепи, изображенной на рисунке, сопротивление реостата на единицу его длины зависит от расстояния x от его левого края как $\rho(x) = \rho_{\max}\dfrac{x}{l}$, где $\rho_{\max}$ — максимальное сопротивление на единицу длины, l — длина реостата. Напряжение идеального источника питания U. На каком расстоянии от левого края реостата тепловая мощность, выделяемая на всем реостате, минимальна? Чему равно это минимальное значение мощности?



Возможное решение

Найдем сопротивления левой и правой частей реостата как функции координаты ползунка x. Сопротивление участка реостата вычисляется как площадь по графиком или как интеграл от $\rho(x)$ по длине. Для левой части (от 0 до x):

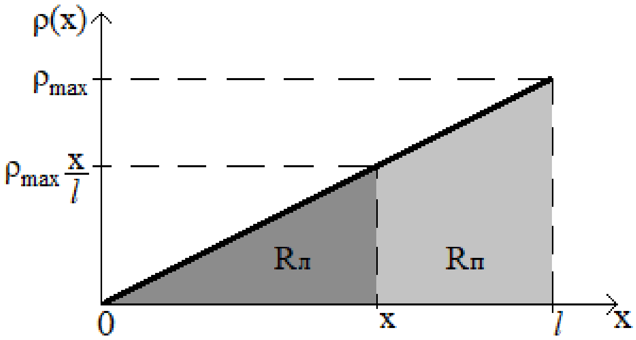
$$R_л = \rho_{\max}\frac{x^2}{2l} = \int_0^x \rho_{\max}\frac{x'}{l}\,dx'.$$

Общее сопротивление всего реостата между концами:

$$R = \rho_{\max}\frac{l}{2} = \int_0^l \rho_{\max}\frac{x}{l}\,dx.$$

Для правой части (от x до l):

$$R_п = R - R_л = \rho_{\max}\frac{l^2 - x^2}{2l} = \int_x^l \rho_{\max}\frac{x'}{l}\,dx'.$$



В данной схеме (источник подключен к ползунку и к обоим концам реостата, соединенным вместе) левая и правая части реостата оказываются подключенными параллельно к источнику напряжения U. Поэтому тепловая мощность, выделяемая на реостате, равна сумме мощностей на каждой части:

$$P = P_л + P_п = \frac{U^2}{R_л} + \frac{U^2}{R_п}.$$

Подставим выражения для $R_л$ и $R_п$:

$$P = \frac{U^2}{\rho_{\max}\dfrac{x^2}{2l}} + \frac{U^2}{\rho_{\max}\dfrac{l^2 - x^2}{2l}} = \frac{2lU^2}{\rho_{\max}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{l^2 - x^2}\right).$$

Дальнейшее решение можно продолжить двумя способами:

способ 1

Чтобы найти минимум P по x, продифференцируем выражение по x и приравняем производную к нулю:

$$P'_x = \frac{2lU^2}{\rho_{\max}}\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{2x}{(l^2 - x^2)^2}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{x}{(l^2-x^2)^2}=\frac{1}{x^3}.$$

Упростим:

$$x^4=(l^2-x^2)^2.$$

$$x^4=l^4-2l^2x^2+x^4$$

$$x^2=\frac{l^2}{2}.$$

Таким образом, координата, при которой мощность минимальна:

$$x=\frac{l}{\sqrt{2}}.$$

способ 2

Просто приведем выражение для мощности к общему знаменателю

$$P=\frac{2lU^2}{\rho_{\max}}\left(\frac{l^2}{x^2(l^2-x^2)}\right).$$

Мощность минимальна, когда знаменатель максимален. Знаменатель – квадратичный полином, если в качестве переменной принять x^2. Максимум достигается в середине промежутка между нулями (корнями). Координата, при которой мощность минимальна:

$$x^2=\frac{l^2}{2}.$$

Подставим полученное значение в выражение для мощности:

$$P_{\min}=\frac{8U^2}{\rho_{\max}l}.$$

Критерии оценивания

Критерий	**Баллы**
Нахождение сопротивлений левой и правой частей реостата $\rho(x)$	6
Вычисление мощности как суммы мощностей на параллельных участках/ как мощность на общем сопротивлении параллельных участков	4
Нахождение производной $P'(x)$ и составление уравнения для поиска минимума или приведение выражение для мощности к общему знаменателю (удобному для поиска экстремума)	4
Решение уравнения и нахождение координаты x, при которой мощность минимальна, любым способом	4
Подстановка найденного x в выражение для мощности и упрощение до конечного ответа	2

Задание 5. (20 б.)

На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F находится отрезок длиной $L \ll F$, расположенный вдоль главной оптической оси. Центр отрезка расположен на расстоянии $d > F$ от линзы. Если отрезок развернуть на $90°$ относительно его середины, длина его изображения уменьшится в k раз. Найдите d.

Указание: $(1+a)^\gamma \approx 1+\gamma a$, при $a \ll 1$.

Возможное решение

Рассмотрим два случая: исходное положение отрезка вдоль главной оптической оси и после поворота на $90°$.

Отрезок вдоль главной оптической оси

Пусть середина отрезка находится на расстоянии d от линзы. Тогда расстояния от линзы до ближнего и дальнего концов равны соответственно:

$$d_1 = d - \frac{L}{2}, \quad d_2 = d + \frac{L}{2}.$$

Для каждого конца найдем расстояние до изображения по формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Выразим f:

$$f = \frac{Fd}{d-F}.$$

Для концов:

$$f_1 = \frac{Fd_1}{d_1 - F}, \quad f_2 = \frac{Fd_2}{d_2 - F}.$$

Оба знаменателя не обращаются в 0, в противном случае изображение отрезка будет иметь бесконечную длину. Длина изображения вдоль оси:

$$L_{\text{ос}} = |f_2 - f_1|.$$

Далее рассмотрим 2 способа:

способ 1

Подставим расстояния концов отрезка в выражение для $L_{\text{ос}}$

$$L_{\text{ос}} = F\left(\frac{d-\frac{L}{2}}{d-\frac{L}{2}-F} - \frac{d+\frac{L}{2}}{d+\frac{L}{2}-F}\right).$$

$$L_{\text{ос}} = F\left(\frac{FL}{(d-F)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}\right).$$

Строго говоря, далее следует рассмотреть 2 случая:
1. $(d-F) \gg L$ Тогда вторым слагаемым можно пренебречь

$$L_{\text{ос}} = \frac{LF^2}{(d-F)^2}.$$

2. $(d-F)$ порядка L. В этом случае ответ на вопрос задачи с достаточной точностью уже известен: $d \approx F$. Рассмотрение этого случая не требуется для получения максимальной оценки за задачу.

способ 2

Поскольку $L \ll F$, можно использовать дифференциальное приближение. Из формулы линзы дифференцированием получаем продольное увеличение:

$$\frac{df}{dd} = -\left(\frac{f}{d}\right)^2.$$

Тогда для малого приращения $\Delta d = L$ изменение положения изображения:

$$\Delta f \approx \frac{df}{dd} \cdot L = -\left(\frac{f}{d}\right)^2 L.$$

Длина изображения равна модулю этого изменения:

$$L_{\text{ос}} = \left(\frac{f}{d}\right)^2 L.$$

Подставляем $f = \dfrac{Fd}{d-F}$:

$$\left(\frac{f}{d}\right)^2 = \left(\frac{F}{d-F}\right)^2.$$

Таким образом,

$$L_{\text{ос}} = L \cdot \frac{F^2}{(d-F)^2}.$$

Отрезок перпендикулярно главной оптической оси

После поворота отрезок расположен в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси, его середина по-прежнему на расстоянии d, а длина отрезка равна L. Все точки отрезка находятся примерно на одном расстоянии d от линзы. Поперечное увеличение линзы равно:

$$V = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F}.$$

Длина изображения в поперечном направлении:

$$L_{\text{перп}} = |V| \cdot L = L \cdot \frac{F}{d-F}.$$

Поворот отрезка

По условию длина изображения уменьшается в k раз после поворота, то есть:

$$L_{\text{перп}} = \frac{L_{\text{ос}}}{k}.$$

Подставляем выражения для длин изображений:

$$L \cdot \frac{F}{d-F} = \frac{1}{k} \cdot L \cdot \frac{F^2}{(d-F)^2},$$

$$\frac{1}{d-F} = \frac{F}{k(d-F)^2},$$

$$d - F = \frac{F}{k}.$$

Находим искомое значение d:

$$d = F + \frac{F}{k} = F\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Критерии оценивания

Критерий	**Баллы**
Определение расстояний от линзы до концов отрезка в исходном положении	1
Применение формулы тонкой линзы для нахождения положений изображений концов отрезка в исходном положении	4
Использование приближения $L \ll F$ или понятия продольного увеличения нахождение длины осевого изображения	3
Корректный расчет длины осевого изображения с пользованием $L \ll F$ / вычисление продольного увеличения любым способом или использование готовой формулы (продольное увеличение) для расчета длины осевого изображения	3
Нахождение поперечного увеличения для повернутого отрезка и длины поперечного изображения	4
Составление уравнения из условия уменьшения длины изображения в k раз	3
Решение уравнения и получение окончательной формулы для d	2