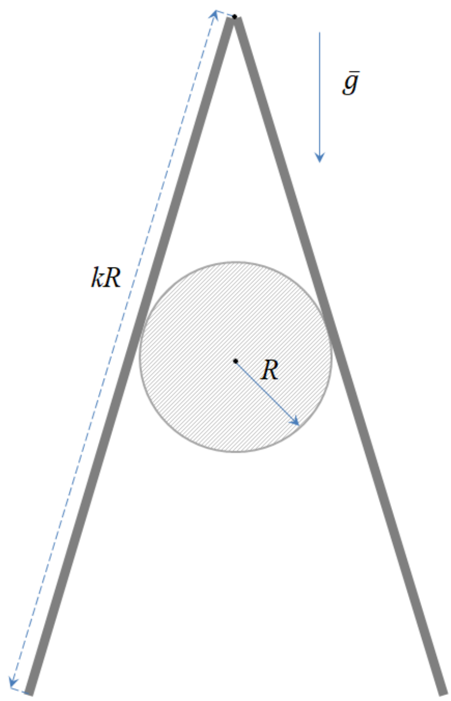
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2025-2026 учебный год (решения)
11 класс

Пояснения к критериям оценивания

Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий конкретно к данной задаче и записанный верно. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев. Баллы за правильный ответ выставляются только при наличии корректного решения.

Задание 1. (20 б.)

Две одинаковые прямые (недеформируемые) однородные доски скреплены за края дверной петлей. Ось петли стационарно закреплена горизонтально и позволяет доскам висеть вертикально или свободно отклоняться на угол не больше 90° от вертикали. Трения в петле нет. Между досками можно поместить цилиндрический обрезок бревна радиуса R (также недеформируемый). Длина досок kR, масса каждой доски равна массе обрезка, масса и размер петли пренебрежимо малы. Было обнаружено, что обрезок может застревать между досками, в частности, таким образом: он касается досок горизонтальными отрезками на боковой поверхности, плоскость крышек цилиндра вертикальна. При каком минимальном коэффициенте трения между обрезком бревна и досками это возможно? Для примера возьмите $k = 54$. Для простоты расчетов пренебрегите толщиной досок по сравнению с R.



Возможное решение

Геометрия системы

Из симметрии системы ось цилиндра C находится на одной вертикали с осью петли O. Расстояние $OC = sR$. Доски касаются цилиндра в точках T. Так как касание происходит по горизонтальным отрезкам (параллельным оси цилиндра), в сечении плоскостью, перпендикулярной оси петли, видим, что линии досок касаются окружности радиуса R. Следовательно, $CT \perp OT$. В треугольнике OCT угол при T прямой.

Обозначим угол между доской OT и вертикалью OC как θ. Тогда:

$$\sin\theta = \frac{CT}{OC} = \frac{R}{sR} = \frac{1}{s}, \quad \cos\theta = \sqrt{1-\frac{1}{s^2}} = \frac{\sqrt{s^2-1}}{s}.$$

Также:

$$OT = \sqrt{OC^2 - CT^2} = \sqrt{(sR)^2 - R^2} = R\sqrt{s^2-1}.$$

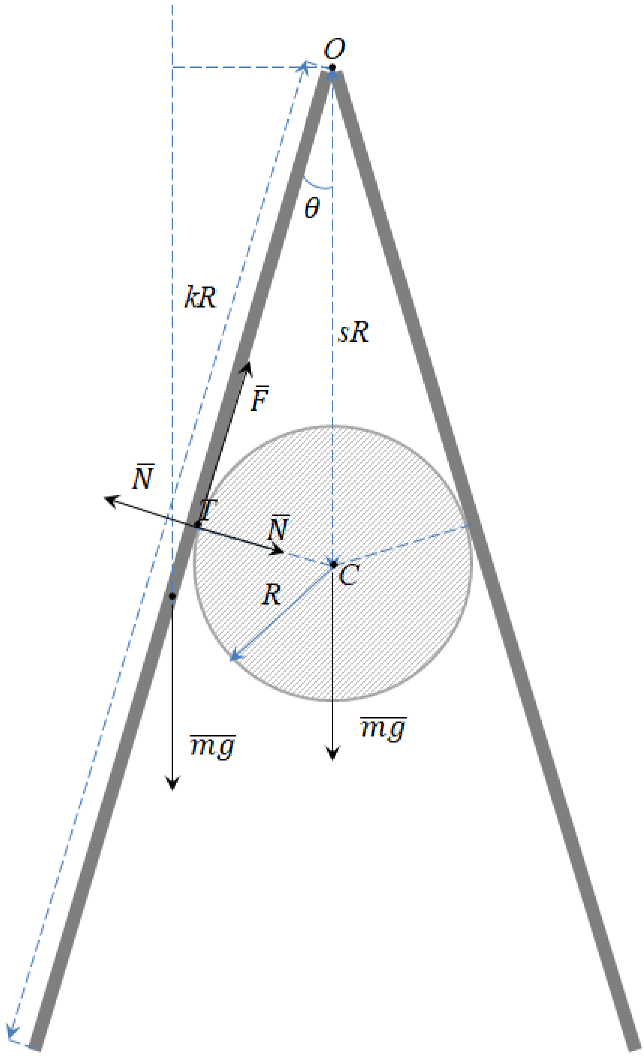


Рис. 1: Силы, действующие на цилиндр в сечении, и силы, действующую на левую доску, создающие ненулевой момент

Равновесие доски

Рассмотрим левую доску. На нее действуют:

- Сила тяжести $\vec{m}g$, приложенная в центре доски (на расстоянии $L/2 = kR/2$ от O)
- Нормальная сила со стороны цилиндра $\vec{N}$, приложенная в точке T и направленная перпендикулярно доске
- Реакция в петле O (не создает момента, так как трение в петле отсутствует)
- Сила трения со стороны цилиндра не создает момента, так как имеет нулевое плечо (Не указана на рисунке)

Составим уравнение моментов относительно оси петли O:

$$sNR\cos\theta = mg\frac{kR}{2}\sin\theta.$$

Подставляя $\sin\theta$ и $\cos\theta$, получаем:

$$N\sqrt{s^2-1} = mg\frac{k}{2s},$$

откуда:

$$N = \frac{mgk}{2s\sqrt{s^2-1}}. \tag{1}$$

Равновесие цилиндра

На цилиндр действуют две нормальные силы $\vec{N}$ и две силы трения $\vec{F}$, направленные вверх вдоль досок. Учитывая что нас интересует предельное значение коэффициента трения, ниже которого доска начнет проскальзывать при любом s, мы можем приравнять $F = \mu N$. Тогда условие равновесия по вертикали:

$$2\mu N \cos\theta = mg + 2N\sin\theta.$$

Подставляя выражения для N, $\sin\theta$ и $\cos\theta$, получаем зависимость требуемого коэффициента трения от s:

$$\mu(s) = \frac{s^2}{k} + \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}.$$

Эта формула дает минимальный коэффициент трения μ, необходимый для удержания цилиндра на расстоянии sR без проскальзывания. В терминах угла θ эта формула может быть представлена в виде

$$\mu(\theta) = \frac{1}{k\sin^2\theta} + \operatorname{tg}\theta.$$

Минимизация $\mu(s)$

Для того чтобы цилиндр мог застрять при заданном k, необходимо, чтобы существовало такое s, при котором фактический коэффициент трения μ_0 удовлетворяет условию $\mu_0 \geq \mu(s)$. Минимальное значение $\mu(s)$ при $s > 1$ соответствует минимально возможному коэффициенту трения, при котором равновесие вообще возможно.

Найдем производную $\mu'(s)$ и приравняем ее нулю для поиска минимума:

$$\mu'(s) = \frac{2s}{k} - \frac{s}{(s^2-1)^{3/2}} = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{2}{k} = \frac{1}{(s^2-1)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad (s^2-1)^{3/2} = \frac{k}{2}.$$

Обозначим s_0 — значение s, при котором достигается минимум μ. Тогда:

$$s_0^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^{2/3} + 1.$$

Подставим s_0 в выражение для $\mu(s)$:

$$\mu_{\text{мин}} = \frac{s_0^2}{k} + \frac{1}{\sqrt{s_0^2-1}} = \frac{1+\left(\frac{k}{2}\right)^{2/3}}{k} + \frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^{1/3}} = \frac{1}{k} + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{k}\right)^{1/3}$$

Численный пример для $k = 54$

Вычислим $\mu_{\text{мин}}$ при $k = 54$:

$$\frac{k}{2} = 27, \quad \left(\frac{k}{2}\right)^{1/3} = 3.$$

Тогда:

$$s_0^2 = 10.$$

Следовательно:

$$\mu_{\text{мин}} = \frac{10}{54} + \frac{1}{3} = \frac{14}{27} \approx 0.5185.$$

Таким образом, минимальный коэффициент трения, при котором цилиндр может застрять, составляет примерно 0.519.

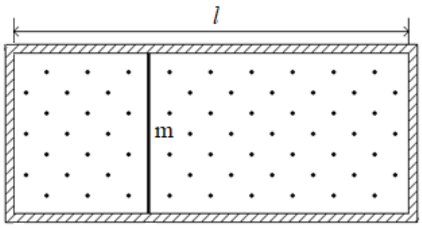
Критерии оценивания

Критерий	Баллы
Баланс моментов сил для доски	4
Выражение для силы реакции опоры в точке касания доски и бревна через единый праметр, задающий геометрию системы	2
Условие равновесия цилиндра по вертикали в предельном случае	3
Зависимость $\mu(s)$ или от подходящего угла	3
Поиск минимума функции $\mu(s)$ через производную или иным методом	4
Получение общего выражения для $\mu_{\text{мин}}$	2
Проведение численного расчета для заданного $k = 54$	2

Задание 2. (20 б.)

Закрытый теплоизолированный цилиндрический сосуд длиной l и площадью поперечного сечения S, наполненный двухатомным идеальным газом, разделен тонкой непроницаемой перегородкой массой m, которая может без трения перемещаться вдоль сосуда и так же, как и стенки сосуда, не пропускает тепло. В состоянии равновесия давление газа в сосуде P_0, а объем газа справа от перегородки в k раз больше, чем объем газа слева от перегородки. Найдите частоту малых гармонических колебаний перегородки при отклонении от положения равновесия много меньшем расстояний между ее равновесным положением и торцами сосуда.

Указание: $(1+a)^\gamma \approx 1 + \gamma a$ при $a \ll 1$.



Возможное решение

На перегородку вдоль сосуда действуют две силы давления газа: в левой части сосуда сила направлена вправо, в правой — влево. Запишем второй закон Ньютона для перегородки, направив ось Ox вправо и отсчитывая координату от левого торца сосуда:

$$ma = P_1 S - P_2 S,$$

или

$$a + \frac{S}{m}(P_2 - P_1) = 0,$$

где P_1 и P_2 — давления газа слева и справа от перегородки соответственно, S — площадь поперечного сечения сосуда.

Так как стенки сосуда и перегородка не пропускают тепло, левая и правая части сосуда теплоизолированы как от окружающей среды, так и друг от друга. Поэтому в них протекают адиабатические процессы.

Уравнения адиабат для левой и правой частей сосуда:

$$P_1 V_1^\gamma = P_0 V_{10}^\gamma = \text{const},$$

$$P_2 V_2^\gamma = P_0 V_{20}^\gamma = \text{const},$$

где V_1 и V_2 — объемы газа, P_1 и P_2 — давления газа, V_{10} и V_{20} — объемы газа в состоянии равновесия слева и справа от перегородки соответственно, P_0 — давление газа в сосуде в состоянии равновесия.

Выразим давления и подставим во второй закон Ньютона:

$$a+\frac{S}{m}P_0\left(V_{20}^{\gamma}V_2^{-\gamma}-V_{10}^{\gamma}V_1^{-\gamma}\right)=0.$$

Но $V_{20}=kV_{10}$ по условию, тогда, учитывая, что общий объем сосуда $V=V_{10}+V_{20}$, будем иметь:

$$V_{10}=\frac{V}{k+1},\quad V_{10}^{\gamma}=\frac{V^{\gamma}}{(k+1)^{\gamma}},$$
$$V_{20}=\frac{kV}{k+1},\quad V_{20}^{\gamma}=\frac{k^{\gamma}V^{\gamma}}{(k+1)^{\gamma}}.$$

В результате получим:

$$a+\frac{SP_0V^{\gamma}}{m(k+1)^{\gamma}}\left(k^{\gamma}V_2^{-\gamma}-V_1^{-\gamma}\right)=0.$$

Пусть l_1 — расстояние от перегородки до левого торца сосуда, а l_2 — расстояние от перегородки до правого торца сосуда в положении равновесия. Тогда:

$$l=l_1+l_2,\quad \frac{l_2}{l_1}=\frac{V_{20}}{V_{10}}=k,$$

$$l_1=\frac{l}{k+1},\quad l_2=\frac{kl}{k+1}.$$

Подставим во второй закон Ньютона:

$$a+\frac{S^{1-\gamma}P_0V^{\gamma}}{m(k+1)^{\gamma}}\left(k^{\gamma}\left(l_2-\Delta x\right)^{-\gamma}-\left(l_1+\Delta x\right)^{-\gamma}\right)=0.$$

Вынесем l_1 и l_2 за скобки:

$$a+\frac{SP_0l^{\gamma}}{m(k+1)^{\gamma}}\left(\left(\frac{k}{l_2}\right)^{\gamma}\left(1-\frac{\Delta x}{l_2}\right)^{-\gamma}-\frac{1}{l_1^{\gamma}}\left(1+\frac{\Delta x}{l_1}\right)^{-\gamma}\right)=0.$$

По условию отклонение перегородки от положения равновесия Δx много меньше расстояний между положением равновесия и торцами сосуда l_1 и l_2:

$$\Delta x\ll l_1,\quad \Delta x\ll l_2.$$

Тогда:

$$\frac{\Delta x}{l_1}\ll 1,\quad \frac{\Delta x}{l_2}\ll 1.$$

Используя приближение $(1+a)^{\gamma}\approx 1+\gamma a$ при $a\ll 1$, получаем:

$$\left(1+\frac{\Delta x}{l_1}\right)^{-\gamma}\approx 1-\gamma\frac{\Delta x}{l_1},\quad \left(1-\frac{\Delta x}{l_2}\right)^{-\gamma}\approx 1+\gamma\frac{\Delta x}{l_2}.$$

Подставим эти приближения:

$$a+\frac{SP_0l^{\gamma}}{m(k+1)^{\gamma}}\left(\left(\frac{k}{l_2}\right)^{\gamma}\left(1+\gamma\frac{\Delta x}{l_2}\right)-\frac{1}{l_1^{\gamma}}\left(1-\gamma\frac{\Delta x}{l_1}\right)\right)=0.$$

Учитывая, что $l_1=\frac{l}{k+1}$, $l_2=\frac{kl}{k+1}$, преобразуем:

$$\left(\frac{k}{l_2}\right)^{\gamma}=\left(\frac{k(k+1)}{kl}\right)^{\gamma}=\left(\frac{k+1}{l}\right)^{\gamma},\quad \frac{1}{l_1^{\gamma}}=\left(\frac{k+1}{l}\right)^{\gamma}.$$

Тогда:

$$a+\frac{SP_0l^{\gamma}}{m(k+1)^{\gamma}}\left(\left(\frac{k+1}{l}\right)^{\gamma}\left(1+\gamma\frac{\Delta x}{l_2}\right)-\left(\frac{k+1}{l}\right)^{\gamma}\left(1-\gamma\frac{\Delta x}{l_1}\right)\right)=0.$$

Сократим на $\left(\frac{k+1}{l}\right)^{\gamma}$:

$$a + \frac{SP_0}{m}\left(\left(1 + \gamma\frac{\Delta x}{l_2}\right) - \left(1 - \gamma\frac{\Delta x}{l_1}\right)\right) = 0,$$

$$a + \frac{SP_0}{m}\gamma\left(\frac{\Delta x}{l_2} + \frac{\Delta x}{l_1}\right) = 0.$$

Подставим l_1 и l_2:

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{k+1}{l} + \frac{k+1}{kl} = \frac{(k+1)^2}{kl}.$$

Получаем:

$$a + \frac{SP_0}{m}\gamma \cdot \frac{(k+1)^2}{kl}\Delta x = 0.$$

Ускорение — вторая производная координаты по времени, поэтому:

$$\frac{d^2(\Delta x)}{dt^2} + \frac{\gamma SP_0(k+1)^2}{kml}\Delta x = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой:

$$\omega = (k+1)\sqrt{\frac{\gamma SP_0}{kml}}.$$

Для двухатомного газа количество степеней свободы $i = 5$, а показатель адиабаты:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}.$$

Тогда окончательно:

$$\omega = (k+1)\sqrt{\frac{7SP_0}{5kml}}.$$

Частота колебаний в герцах:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k+1}{2\pi}\sqrt{\frac{7SP_0}{5kml}}.$$

Критерии оценивания

Критерий	**Баллы**
Запись второго закона Ньютона для перегородки через давление	2
Введение отклонения от положения равновесия	1
Учет адиабатичности процессов в обеих частях сосуда / запись уравнений адиабат через объем и давление (с учетом смещения перегородки из равновесия)	4
Выражение объемов через координату перегородки и геометрические параметры сосуда (с учетом смещения перегородки из равновесия)	2
Линеаризация уравнения с использованием условия малости отклонения	5
Уравнения гармонических колебаний	3
Выражение для циклической частоты, частоты или периода колебаний	3

Задание 3. (20 б.)

Очень длинный кабель представляет собой две коаксиальные (с совпадающей осью) цилиндрические медные жилы, разделенные слоем изоляции. Внутренняя жила представляет из себя цилиндр, внешняя – цилиндрический слой. Внешний радиус кабеля подобран таким образом, что площади поперечного сечения жил равны. При протекании тока I_0 через каждую из жил, температура внутренней жилы постоянна по объему с хорошей точностью и равна 45°C, температура внешней жилы также почти постоянна по объему и равна 35°C. При токе $2I_0$, протекающем по каждой жиле, внутренняя жила нагревается до 90°C.

а) Найдите температуру внешней жилы в этом случае (ток $2I_0$ в обеих жилах).

б) Найдите температуру обеих жил при протекании тока $3I_0$ в каждой жиле.

в) Найдите температуру обеих жил, когда ток $4I_0$ течет по внутренней жиле, а по внешней не течет вовсе.

Зависимостью сопротивления меди от температуры в данной задаче следует пренебречь. Температура внешней среды предполагается постоянной и не зависящей от тока в кабеле.

Возможное решение

Тепловая модель

Введем обозначения: T_1 – температура внутренней жилы, T_2 – температура внешней жилы, T_0 – температура окружающей среды (постоянна), R – электрическое сопротивление единицы длины каждой жилы (жилы имеют равные сечения, материал одинаков, зависимостью от температуры пренебрегаем), $R_{\text{т}1}$ – тепловое сопротивление между внутренней и внешней жилой (на единицу длины), $R_{\text{т}2}$ – тепловое сопротивление между внешней жилой и окружающей средой (на единицу длины).

Мощность джоулева тепла, выделяемая на единицу длины:

$$P_1 = I_1^2 R, \quad P_2 = I_2^2 R.$$

Тепловой баланс устанавливается из условия, что все тепло, выделяемое во внутренней жиле, передается через изоляцию к внешней жиле, а суммарное тепло от внутренней и внешней жил отводится от внешней жилы в окружающую среду:

$$P_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{т}1}}, \tag{2}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{T_2 - T_0}{R_{\text{т}2}}. \tag{3}$$

Из условия при токе I_0 ($I_1 = I_2 = I_0$) $T_1 = 45°\text{C}$, $T_2 = 35°\text{C}$. Из (2):

$$I_0^2 R = \frac{45°\text{C} - 35°\text{C}}{R_{\text{т}1}} = \frac{10°\text{C}}{R_{\text{т}1}} \tag{4}$$

$$R_{\text{т}1} = \frac{10°\text{C}}{I_0^2 R}. \tag{5}$$

Из (3):

$$2I_0^2 R = \frac{35°\text{C} - T_0}{R_{\text{т}2}} \tag{6}$$

$$R_{\text{т}2} = \frac{35°\text{C} - T_0}{2I_0^2 R}. \tag{7}$$

При токе $2I_0$ ($I_1 = I_2 = 2I_0$) известно, что $T_1' = 90°\text{C}$. Подставим токи в (2):

$$(2I_0)^2 R = \frac{90°\text{C} - T_2'}{R_{\text{т}1}}$$

$$4I_0^2 R = \frac{90°\text{C} - T_2'}{10/(I_0^2 R)}$$

$$90 - T_2' = 4I_0^2 R \cdot \frac{10°\text{C}}{I_0^2 R} = 40°\text{C}.$$

Отсюда температура внешней жилы:

$$T_2' = 90°\text{C} - 40°\text{C} = 50°\text{C}. \quad \text{(ответ на пункт а)}$$

Определим теперь температуру окружающей среды T_0, она будет нужна в дальнейшем. Из (3) для этого случая:

$$4I_0^2R + 4I_0^2R = \frac{T_2' - T_0}{R_{\text{т}2}}$$

Подставим выражение для $R_{\text{т}2}$ из (7):

$$8I_0^2R = \frac{2I_0^2R(50°\text{C} - T_0)}{35°\text{C} - T_0}.$$

$$8 = \frac{2(50°\text{C} - T_0)}{35°\text{C} - T_0}$$

$$140°\text{C} - 4T_0 = 50°\text{C} - T_0$$

$$T_0 = 30°\text{C}.$$

Тогда из (7):

$$R_{\text{т}2} = \frac{35°\text{C} - 30°\text{C}}{2I_0^2R} = \frac{5°\text{C}}{2I_0^2R}.$$

Ток $3I_0$ (пункт б)

При $I_1 = I_2 = 3I_0$:

$$P_1 = P_2 = 9I_0^2R.$$

Из (2):

$$9I_0^2R = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{т}1}}, \tag{8}$$

$$T_1 - T_2 = 9I_0^2R \cdot \frac{10}{I_0^2R} = 90°\text{C}. \tag{9}$$

Из (3):

$$9I_0^2R + 9I_0^2R = \frac{T_2 - T_0}{R_{\text{т}2}},$$

$$T_2 - 30°\text{C} = 18I_0^2R \cdot \frac{5}{2I_0^2R} = 45°\text{C}.$$

Отсюда:

$$T_2 = 30°\text{C} + 45°\text{C} = 75°\text{C}.$$

Из (9):

$$T_1 = T_2 + 90°\text{C} = 75°\text{C} + 90°\text{C} = 165°\text{C}.$$

Ответ для пункта (б): $T_1 = 165°\text{C},\ T_2 = 75°\text{C}$.

Ток $4I_0$ только во внутренней жиле (пункт в)

При $I_1 = 4I_0$, $I_2 = 0$:

$$P_1 = (4I_0)^2 R = 16 I_0^2 R, \quad P_2 = 0.$$

Из (2):

$$16 I_0^2 R = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{т}1}} \tag{10}$$

$$T_1 - T_2 = 16 I_0^2 R \cdot \frac{10°\text{C}}{I_0^2 R} = 160°\text{C}. \tag{11}$$

Теперь все тепло, выделяемое во внутренней жиле, передается внешней и отводится в среду, поэтому уравнение (3) принимает вид:

$$P_1 + 0 = \frac{T_2 - T_0}{R_{\text{т}2}}$$

$$T_2 - 30°\text{C} = 16 I_0^2 R \cdot \frac{5}{2 I_0^2 R} = 40°\text{C}.$$

Отсюда:

$$T_2 = 30°\text{C} + 40°\text{C} = 70°\text{C}.$$

Из (11):

$$T_1 = T_2 + 160°\text{C} = 70°\text{C} + 160°\text{C} = 230°\text{C}.$$

Ответ для пункта (в): $T_1 = 230°\text{C}$, $T_2 = 70°\text{C}$.

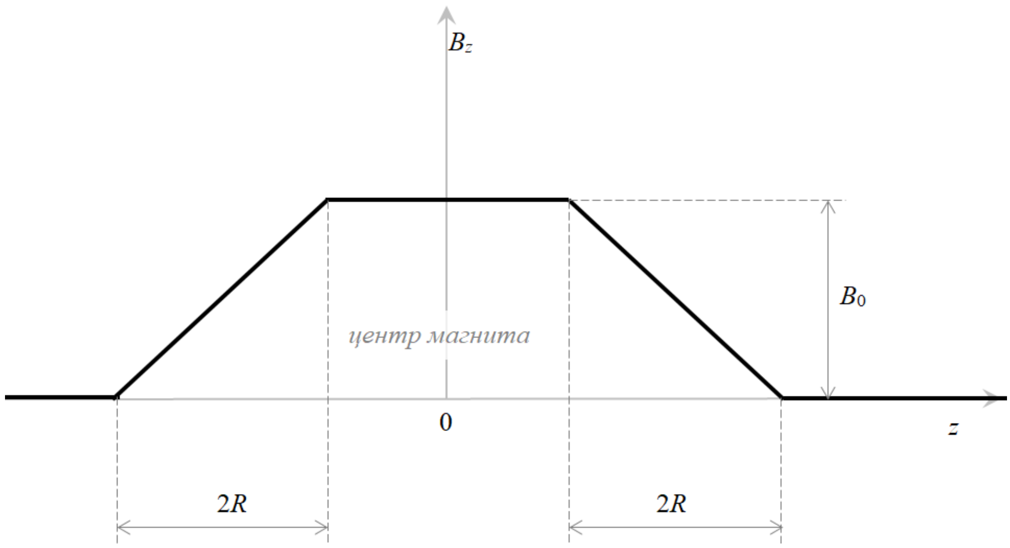
Критерии оценивания

Критерий	**Баллы**
Уравнения теплового баланса для жил	4
Тепловая мощность тока в жилах	2
Связь тепловых сопротивлений (или связанных величин), известных температур, тока и сопротивления	2
Температура окружающей среды T_0 найдена или выражена через известные температуры	2
Ответ на пункт а) с обоснованием	2
Ответ на пункт б) с обоснованием	4
Ответ на пункт в) с обоснованием	4

Задание 4. (20 б.)

Небольшой неодимовый магнит массой m падает с нулевой начальной скоростью по вертикали. Магнит имеет форму цилиндра и падает вдоль своей оси, которая совпадает с осью симметрии его намагниченности. Магнит отпускают на высоте H от верхнего торца длинной вертикальной медной трубы с внутренним радиусом R. После участка свободного падения магнит входит в эту трубу, причем зазор между магнитом и стенками трубы мал по сравнению с ее радиусом. Сопротивлением воздуха и трением о стенки трубы нужно пренебречь.

Магнит создает в окружающем пространстве достаточно сложное магнитное поле. В данной задаче мы для простоты заменим его на значительно упрощенную модель. Зависимость вертикальной компоненты магнитной индукции B_z от координаты z вдоль оси магнита представлена на графике. Поле, для простоты, считается одинаковым на всем горизонтальном сечении трубы. Удельное сопротивление меди ρ, толщина стенки трубы $d \ll R$.



а) Дайте физически обоснованное качественное описание движения магнита.

б) Получите оценку установившейся скорости падения магнита в трубе v_s в рамках указанных приближений.

в) Оцените время $\tau_{1/2}$, через которое изначально большая скорость магнита на входе в трубу $v_0 \gg v_s$ уменьшится в 2 раза в процессе его движения в трубе.

г) Укажите численные значения v_s и $\tau_{1/2}$, если $R = 10$ мм, $d = 1$ мм, $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $m = 0.1$ кг, $B_0 = 0.7$ Тл, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение

а) Качественное описание

При движении магнита внутри медной трубы изменение магнитного потока через поперечные сечения трубы вызывает появление вихревых токов в стенке трубы. Эти токи, в соответствии с законом Ленца, создают магнитное поле, замедляющее изменение магнитного потока через контур. Таким образом, на магнит действует сила торможения, зависящая от его скорости. В начальный момент, когда магнит входит в трубу с большой скоростью, сила торможения велика, и скорость магнита быстро уменьшается. Со временем сила торможения уменьшается, и при некоторой скорости сила тяжести уравновешивается средней силой торможения. Далее магнит движется с постоянной установившейся скоростью v_s.

б) Оценка установившейся скорости v_s

При установившемся движении мощность силы тяжести равна мощности джоулевых потерь в трубе:

$$mgv_s = P_{\text{дисс}}.$$

Оценим мощность диссипации. Магнитное поле магнита зависит от координаты z вдоль оси. При движении магнита (вместе с создаваемым полем) со скоростью v в фиксированной точке трубы производная магнитной индукции по времени:

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{dB_z}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dB_z}{dz} \cdot (-v).$$

Модуль ЭДС, наведенной в кольцевом контуре радиуса R (внутренний радиус трубы):

$$\mathcal{E} = \pi R^2 \left|\frac{dB_z}{dt}\right| = \pi R^2 \left|\frac{dB_z}{dz}\right| v.$$

Сопротивление такого кольца высотой Δz (ток течет по окружности):

$$r = \rho \frac{2\pi R}{d\Delta z}.$$

Мощность, выделяемая в этом кольце:

$$dP = \frac{\mathcal{E}^2}{r} = \frac{\pi^2 R^4 (dB_z/dz)^2 v^2 d\Delta z}{\rho \cdot 2\pi R} = \frac{\pi R^3 (dB_z/dz)^2 v^2 d\,\Delta z}{2\rho}.$$

Полная мощность диссипации получается суммированием (интегрированием) по всем кольцам, где $dB_z/dz \neq 0$. Из графика $B_z(z)$ находим:

$$\left|\frac{dB_z}{dz}\right| = \frac{B_0}{2R} \quad \text{– постоянная на участках длиной } 2R.$$

Полная мощность P в этом случае является произведением $\frac{dP}{dz}$ и протяженности участка с переменным полем. Тогда полная мощность диссипации:

$$P_{\text{дисс}} = \frac{\pi R^3 v^2 d}{2\rho} \cdot 2 \cdot \left(\frac{B_0}{2R}\right)^2 \cdot 2R = \frac{\pi R^2 B_0^2 d}{2\rho} v^2.$$

Приравнивая mgv_s к $P_{\text{дисс}}$ при $v = v_s$, получаем:

$$mgv_s = \frac{\pi R^2 B_0^2 d}{2\rho} v_s^2,$$

откуда

$$v_s = \frac{2\rho mg}{\pi R^2 B_0^2 d}.$$

в) Оценка времени $\tau_{1/2}$ уменьшения скорости в 2 раза при $v_0 \gg v_s$

При большой начальной скорости v_0 сила тяжести мала по сравнению с силой торможения. Из выражения для мощности диссипации находим силу торможения:

$$F_{\text{торм}} = \frac{P_{\text{дисс}}}{v} = \frac{\pi R^2 B_0^2 d}{2\rho} v.$$

Таким образом, $F_{\text{торм}} = kv$, где $k = \frac{\pi R^2 B_0^2 d}{2\rho}$. Уравнение движения (без учета силы тяжести):

$$m\frac{dv}{dt} = -kv.$$

Если Вы владеете техникой решения простейших дифференциальных уравнений, его можно точно решить. Решение этого дифференциального уравнения — экспоненциальное затухание: $v(t) = v_0 e^{-kt/m}$. Время, за которое скорость уменьшается в 2 раза, равно $\tau_{1/2} = \frac{m}{k} \ln 2$.

Для грубой оценки достаточно заменить силу на ее среднее значение на интересующем промежутке

$$F_{\text{ср}} = \frac{3kv_0}{4}.$$

$$a_{\text{ср}} = \frac{3kv_0}{4m}.$$

$$\tau_{1/2} = \frac{v_0 - v_0/2}{a_{\text{ср}}} = \frac{2m}{3k}$$

$$\tau_{1/2} = \frac{2}{3} \frac{2\rho m}{\pi R^2 B_0^2 d}.$$

Или в более точном варианте

$$\tau_{1/2} = \ln 2 \frac{2\rho m}{\pi R^2 B_0^2 d}.$$

Заметим, что из выражения для v_s следует $v_s = \frac{mg}{k}$, поэтому $\tau_{1/2} \sim \frac{v_s}{g}$.

г) Численные значения

Подставим данные: $R = 0.01$ м, $d = 0.001$ м, $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $m = 0.1$ кг, $B_0 = 0.7$ Тл, $g = 10$ м/с^2.
Сначала вычислим v_s:

$$v_s = \frac{2 \cdot 1.7 \cdot 10^{-8} \cdot 0.1 \cdot 10}{\pi \cdot (0.01)^2 \cdot (0.7)^2 \cdot 0.001} \text{ м/с} \approx 0.22 \text{ м/с}.$$

$\tau_{1/2}$ в различных вариантах оценки:

$$\tau_{1/2} \approx \ln 2 \frac{v_s}{g} \approx 0.0153 \text{ с}.$$

или

$$\tau_{1/2} \approx \frac{2}{3} \frac{v_s}{g} \approx 0.0147 \text{с}.$$

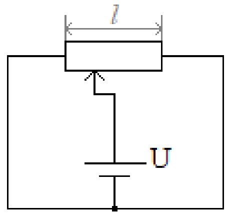
В обоих случаях можно округлить до 0.015 с.

Критерии оценивания

Критерий	**Баллы**
Качественное описание физики процесса: возникновение вихревых токов, правило Ленца, установление постоянной скорости	3
Составление баланса работы / мощности при установившейся скорости	3
Выражение ЭДС индукции через производную поля по координате	3
Выражение для сопротивления элемента трубы и мощности диссипации на малом участке	2
Суммирование рассеянной мощности по длине трубы	2
Получение формулы для установившейся скорости v_s	2
Оценка ускорения или уравнение движения магнита в трубе	2
Оценка времени уменьшения скорости в 2 раза любым удачным способом	2
Проведение численных расчетов для заданных параметров	1

Задание 5. (20 б.)

В цепи, изображенной на рисунке, сопротивление реостата на единицу его длины зависит от расстояния x от его левого края как $\rho(x) = \rho_{\max}\dfrac{x}{l}$, где $\rho_{\max}$ — максимальное сопротивление на единицу длины, l — длина реостата. Напряжение идеального источника питания U. На каком расстоянии от левого края реостата тепловая мощность, выделяемая на всем реостате, минимальна? Чему равно это минимальное значение мощности?



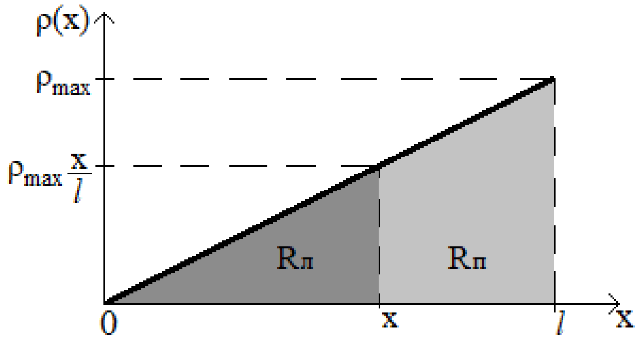
Возможное решение

Найдем сопротивления левой и правой частей реостата как функции координаты ползунка x. Сопротивление участка реостата вычисляется как площадь по графиком или как интеграл от $\rho(x)$ по длине. Для левой части (от 0 до x):

$$R_{\text{л}} = \rho_{\max}\frac{x^2}{2l} = \int_0^x \rho_{\max}\frac{x'}{l}\,dx'.$$

Общее сопротивление всего реостата между концами:

$$R = \rho_{\max}\frac{l}{2} = \int_0^l \rho_{\max}\frac{x}{l}\,dx.$$



Для правой части (от x до l):

$$R_п = R - R_л = \rho_{\max}\frac{l^2 - x^2}{2l} = \int_x^l \rho_{\max}\frac{x'}{l}\,dx'.$$

В данной схеме (источник подключен к ползунку и к обоим концам реостата, соединенным вместе) левая и правая части реостата оказываются подключенными параллельно к источнику напряжения U. Поэтому тепловая мощность, выделяемая на реостате, равна сумме мощностей на каждой части:

$$P = P_л + P_п = \frac{U^2}{R_л} + \frac{U^2}{R_п}.$$

Подставим выражения для $R_л$ и $R_п$:

$$P = \frac{U^2}{\rho_{\max}\dfrac{x^2}{2l}} + \frac{U^2}{\rho_{\max}\dfrac{l^2 - x^2}{2l}} = \frac{2lU^2}{\rho_{\max}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{l^2 - x^2}\right).$$

Дальнейшее решение можно продолжить двумя способами:

способ 1

Чтобы найти минимум P по x, продифференцируем выражение по x и приравняем производную к нулю:

$$P'_x = \frac{2lU^2}{\rho_{\max}}\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{2x}{(l^2 - x^2)^2}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{x}{(l^2 - x^2)^2} = \frac{1}{x^3}.$$

Упростим:

$$x^4 = (l^2 - x^2)^2.$$

$$x^4 = l^4 - 2l^2x^2 + x^4$$

$$x^2 = \frac{l^2}{2}.$$

Таким образом, координата, при которой мощность минимальна:

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

способ 2

Просто приведем выражение для мощности к общему знаменателю

$$P = \frac{2lU^2}{\rho_{\max}}\left(\frac{l^2}{x^2(l^2 - x^2)}\right).$$

Мощность минимальна, когда знаменатель максимален. Знаменатель – квадратичный полином, если в качестве переменной принять x^2. Максимум достигается в середине промежутка между нулями (корнями). Координата, при которой мощность минимальна:

$$x^2 = \frac{l^2}{2}.$$

Подставим полученное значение в выражение для мощности:

$$P_{\min} = \frac{8U^2}{\rho_{\max} l}.$$

Критерии оценивания

Критерий	**Баллы**
Нахождение сопротивлений левой и правой частей реостата $\rho(x)$	6
Вычисление мощности как суммы мощностей на параллельных участках/ как мощность на общем сопротивлении параллельных участков	4
Нахождение производной $P'(x)$ и составление уравнения для поиска минимума или приведение выражение для мощности к общему знаменателю (удобному для поиска экстремума)	4
Решение уравнения и нахождение координаты x, при которой мощность минимальна, любым способом	4
Подстановка найденного x в выражение для мощности и упрощение до конечного ответа	2