

Задания интернет-тура Олимпиады КФУ по математике
для школьников 9 класса
(ноябрь 2024 г)

Задачи с выбором ответов (часть А)

9.1 (8 баллов). Перед полдником в детском лагере в столовой имелись яблоки и апельсины. Каждому ребенку выдали по одному яблоку и одному апельсину. При этом оказалось, что выдано $\frac{3}{5}$ всех имеющихся яблок и $\frac{1}{3}$ всех апельсинов. Какая доля всех имеющихся фруктов была выдана?

- $3/14$
- **$3/7$**
- $14/15$
- выше нет правильного ответа

9.1 (8 баллов). Перед полдником в детском лагере в столовой имелись яблоки и апельсины. Каждому ребенку выдали по одному яблоку и одному апельсину. При этом оказалось, что выдано $\frac{3}{5}$ всех имеющихся фруктов, в частности, половина всех апельсинов. Какая доля всех имеющихся яблок была выдана?

- $1/10$
- $2/3$
- **$3/4$**
- выше нет правильного ответа

9.2 (8 баллов). Вовочка измерил стороны четырехугольника (возможно, невыпуклого). Они оказались равны $AB = 2$, $BC = 2$, $CD = 4$, $DA = 4$. Кроме того, диагональ $AC = 3$. Четырехугольники считаются равными, если их можно наложить друг на друга при помощи движения. Сколько существует различных (попарно неравных) четырехугольников с указанными размерами?

- ни одного (Вовочка ошибся)
- 1
- **2**
- более 2

9.2 (8 баллов). Вовочка измерил стороны четырехугольника (возможно, невыпуклого). Они оказались равны $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 3$, $DA = 3$. Кроме того, диагональ $AC = 3$. Четырехугольники считаются равными, если их можно наложить друг на друга при помощи движения. Сколько существует различных (попарно неравных) четырехугольников с указанными размерами?

- ни одного (Вовочка ошибся)
- **1**
- 2
- более 2

9.3 (8 баллов). Пусть числа x , y , z таковы, что $0 < x < y < z$. Введем обозначения $k_1 = (y - x)^2$, $k_2 = (z - y)^2$, $d_1 = y^2 - x^2$, $d_2 = z^2 - y^2$. Выберите из списка верное высказывание:

- всегда $k_1 < k_2$ и $d_1 < d_2$
- если $d_1 \leq d_2$, то и $k_1 \leq k_2$

- всегда $k_1 < d_1$ и $k_2 < d_2$
- ни одно из перечисленных выше высказываний не верно

9.3 (8 баллов). Пусть числа x, y, z таковы, что $0 < x < y < z$. Введем обозначения $k_1 = (y - x)^2$, $k_2 = (z - y)^2$, $d_1 = y^2 - x^2$, $d_2 = z^2 - y^2$. Выберите из списка верное высказывание:

- если $d_1 < d_2$, то и $k_1 < k_2$
- если $k_1 = k_2$, то и $d_1 = d_2$
- **если $k_1 \leq k_2$, то и $d_1 \leq d_2$**
- ни одно из перечисленных выше высказываний не верно

9.4 (8 баллов). На доске написаны три ненулевых цифры. Вовочка переписал их и вставил знак умножения между первой и второй цифрой, а Любочка – между второй и третьей (например, если написаны цифры 234, то у Вовочки получится произведение $2*34=68$, а у Любочки – $23*4=92$). Полученные ими произведения совпали. Какое из утверждений наверняка верно:

- такого не может быть (кто-то из ребят ошибся)
- это может быть, только если все три цифры совпадают
- это может быть и в том случае, когда ровно две цифры совпадают
- **такое могло произойти и в том случае, когда все цифры различны**

9.4 (8 баллов). На доске написано трехзначное число. Вовочка переписал его и вставил знак умножения между первой и второй цифрой, а Любочка – между второй и третьей (например, если на доске написано число 423, то у Вовочки получится произведение $4*23=92$, а у Любочки – $42*3=126$). Любочкино произведение оказалось ровно в два раза больше Вовочкиного. Какое из утверждений наверняка верно:

- такого не может быть (кто-то из ребят ошибся)
- **это может быть, только если исходное число четное**
- это может быть, только если исходное число нечетное
- такое могло произойти и в том случае, когда исходное число четное, и когда оно нечетное

9.5 (8 баллов). В треугольнике ABC с площадью 48 проведены медианы AP и BQ . Рассмотрим все отрезки, соединяющие точки на этих медианах. Их середины покрывают некоторую фигуру. Площадь этой фигуры равна

- **18**
- 24
- 48
- выше нет правильного ответа

9.5 (8 баллов). В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC = 6$ и $BC = 8$ проведены медианы AP и BQ . Рассмотрим все отрезки, соединяющие точки на этих медианах. Их середины покрывают некоторую фигуру. Площадь этой фигуры равна

- 9
- **12**
- 24
- выше нет правильного ответа

Задачи с открытыми ответами (часть B)

9.6 (12 баллов). Найдите сумму $2024^2 - 2021^2 + 2018^2 - 2015^2 + \dots + 8^2 - 5^2 + 2^2$

Ответ: 2 051 323.

9.6 (12 баллов). Найдите сумму $2025^2 - 2021^2 + 2017^2 - 2013^2 + \dots + 9^2 - 5^2 + 1^2$

Ответ: 2 054 361.

9.7 (12 баллов). В двух ящиках находятся шары: в одном 4 белых и 1 черный, в другом 2 белых и 4 черных. Из первого во второй переложен шар. Какова теперь вероятность вынуть из второго ящика черный шар? Ответ запишите в процентах с округлением до целого числа процентов (без знака процента)

Ответ: 60.

9.7 (12 баллов). В двух ящиках находятся шары: в одном 3 белых и 2 черных, в другом 3 белых и 5 черных. Из первого во второй переложен шар. Какова теперь вероятность вынуть из второго ящика белый шар? Ответ запишите в процентах с округлением до целого числа процентов (без знака процента)

Ответ: 40.

9.8 (12 баллов). Найти наименьшее значение отношения

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$$

Ответ: 0,75.

9.8 (12 баллов). Найти наименьшее значение отношения

$$\frac{x^4 + 4x^2 + 16}{x^2 - 2x + 4}$$

Ответ: 3.

9.9 (12 баллов). Графики функций $y = x^2 + 4x + 3$ и $y = 2x^2 + 3x - 3$ пересекаются в двух точках. Найдите уравнение квадратичной функции, график которой проходит через эти точки и начало координат. В ответе напишите сумму коэффициентов этой функции.

Ответ: 5.

9.9 (12 баллов). Графики функций $y = 2x^2 + 3x + 6$ и $y = x^2 + 5x + 9$ пересекаются в двух точках. Найдите уравнение квадратичной функции, график которой проходит через эти точки и начало координат. В ответе укажите сумму корней этой функции.

Ответ: 0,25.

9.10 (12 баллов). Учительница Аделаида Ивановна продиктовала коэффициенты и корни некоторого квадратного трёхчлена, все они целые числа. Вовочка успел записать только четыре из этих 5 чисел. Если записать их по возрастанию, это числа $-5, 2, 3, 9$. Какое число он пропустил?

Ответ: -30.

9.10 (12 баллов). Учительница Аделаида Ивановна продиктовала коэффициенты и корни некоторого квадратного трёхчлена, все они целые числа. Вовочка успел записать только четыре из этих 5 чисел. Если записать их по возрастанию, это числа $-8, -3, -2, 7$. Какое число он пропустил?

Ответ: 42.