Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Автомобилестроение-КиберАвтоТех»
заключительный этап
2025-2026 учебный год
10,11 класс

Баллы выставлены за полные решения с обоснованием всех этапов рассуждений. За отсутствие обоснований некоторых этапов рассуждений или неполные решения выставляются меньшие баллы.

№1. (20 баллов) На плоскости задана парабола своим уравнением в декартовых координатах:

$$2024x^2 - 2025y = 2026.$$

а) У какого числа точек этой параболы ордината является целым отрицательным числом? **(3 балла)**

б) Для какого числа точек этой параболы выполняются условия:

1) одна из координат является целым числом,
2) $|x| \cdot |y| \leq 1$? **(5 баллов)**

в) Сколько точек, обе координаты которых являются целыми числами, лежит на этой параболе? **(12 баллов)**

Краткое решение.

а) Вершина параболы имеет координаты $\left(0, -\frac{2026}{2025}\right)$. Ветви направлены вверх. Две точки, у которых $y = -1$, лежат на параболе. **Ответ: у двух точек.** **(3 балла)**

б) При $x = 0$ одна точка $\left(0, -\frac{2026}{2025}\right)$ лежит на параболе, при $y = 0 -$ две точки, при $y = -1 -$ две точки, при $x = 1$ и $x = -1 -$ ещё по одной точке. При других целых значениях x или y условие 2) не выполняется. **Ответ: для семи точек.** **(5 баллов)**

в) При целых значениях x и y левая часть уравнения

$$2024x^2 - 2025y = 2026$$

при делении на 3 даёт остаток 0 или 2, а правая даёт остаток 1. Следовательно, в целых числах уравнение не имеет решений. **Ответ. 0.** **(12 баллов)**

№2. (25 баллов). Даны 2025 натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$. Известно, что из каждых 25-ти данных чисел два числа имеют в разложении общий простой множитель, и каждое число a_k является произведением двух простых чисел. Число $b = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots a_{2025}$ является произведением данных 2025-ти чисел. Верны ли утверждения:

а) число b делится на 2025-ю степень некоторого натурального числа; **(1 балл)**

б) число b обязательно делится на 2025-ю степень некоторого простого числа; **(2 балла)**

в) число b может делиться на 2025-ю степень некоторого простого числа; **(2 балла)**

г) число b делится на 43-ю степень некоторого простого числа? **(20 баллов)**

Краткое решение.

а) **Да.** Число b делится на 1^{2025}; **(1 балл)**

б) **Нет.** Можно привести массу контрпримеров, один из них: 2000 чисел $a_k = 2 \cdot 3,$ и 25 чисел $a_k = 2 \cdot 5$. **(2 балла)**

в) **Да**, например, когда один из простых множителей в разложении у всех чисел a_k общий. **(2 балла)**

г) Да. **Доказательство.** Не имеющих общих простых множителей среди чисел a_k не более 24. 2025 зайцев помещаем в 24 клетки. Найдётся клетка, в которой не менее 85-ти зайцев. Не менее 43 из них имеют общий простой множитель (85 зайцев в две клетки). На 43-ю степень его делится число b. **(20 баллов)**

№3. (15 баллов) В пространстве отмечена точка М$(x; y; z)$. За один ход можно отнять по единице от одной или двух координат точки. Играют два игрока – Иван и Пётр. Иван делает первый ход. Выиграет тот, после чьего хода точка окажется в начале координат $(0;\ 0;\ 0)$. Кто выиграет, Иван или Пётр, если

а) точка М изначально имеет координаты $(2025;\ 2025;\ 2025)$, **(5 баллов)**

б) точка М изначально имеет координаты $(2026;\ 2025;\ 2025)$, **(5 баллов)**

в) точка М изначально имеет координаты $(2026;\ 2025; 2026)$? **(5 баллов)**

Краткое решение.

а) **выиграет Пётр**, возвращая точку на прямую с равными координатами $x = y = z$. **(5 баллов)**

б) **выиграет Иван**, первым ходом отняв от первой координаты 1, затем после ходов Петра возвращая точку на прямую с равными координатами
$x = y = z$. **(5 баллов)**

в) **выиграет Иван**, первым ходом отняв от первой и третьей координаты по единице, затем после ходов Петра возвращая точку на прямую с равными координатами
$x = y = z$. **(5 баллов)**

Критерии проверки для номеров 4 и 5

1.Обоснованно получен верный ответ (20 баллов)

2.Верно излагается способ решения задачи, но имеются ошибки в вычислениях (10-15 баллов)

3. Не полностью раскрыт способ решения и не обосновано используемое утверждение в решении задачи, но имеется продвижение в решении задачи (1-10 баллов)

4. Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше (0 баллов)

№4. (20 баллов) Найдите разность между суммой четырехзначных чисел, начинающихся на 2 и суммой четырехзначных чисел, начинающихся на 1.

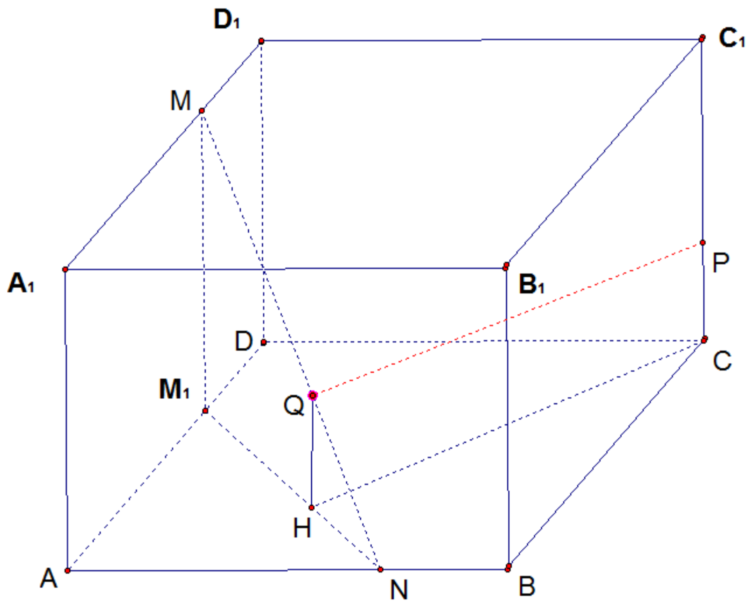
Краткое решение.

Арифметическая прогрессия $\frac{2000+2999}{2}\cdot 1000-\frac{1000+1999}{2}\cdot 1000=1000000$

Ответ: 1000000

№5. (20 баллов) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что точка M принадлежит ребру A_1D_1 и $A_1M : MD_1 = 4 : 3$, а точка N принадлежит ребру AB и AN:NB= 3:2. Найти расстояние между прямыми MN и CC_1 если длина ребра куба равна 2.

Краткое решение.



Прямые MN и CC_1 скрещивающиеся. Плоскость ABCD основания куба перпендикулярна прямой CC_1, проекция прямой MN на эту плоскость есть прямая M_1N, проекция общего перпендикуляра PQ есть отрезок CH, причём PQ = CH. Тогда искомое расстояние вычисляется как высота треугольника NCM_1.

$NM_1 = \frac{58}{35}$ (по теореме Пифагора), $S_{NCM_1} = \frac{58}{35}$ (из площади квадрата отнимаем площади прямоугольных треугольников). Тогда высота треугольника NCM_1 равна 2. **Ответ: 2**