

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
март 2025 г.

Задача 1 (10 баллов).

Питер купил несколько ручек по 1,5 доллара. Если бы он купил ручки по 1,2 доллара, он мог бы купить еще 3 ручки за те же деньги. Если бы он купил ручки по 2,1 доллара, он мог бы купить на 5 ручек меньше за те же деньги. Сколько ручек купил Питер?

Ответ: 15.

Решение. Пусть Питер купил n ручек по 1,5 доллара, потратив $150n$ центов. Этих денег хватит на $n+3$ ручки по \$1,2, но не хватит на $n+4$. То есть,

$$120(n+3) \leq 150n < 120(n+4); \quad 120 \cdot 3 \leq 30n < 120 \cdot 4; \quad 12 \leq n < 16$$

Для более дорогих ручек у нас есть

$$210(n-5) \leq 150n < 210(n-4); \quad -210 \cdot 5 \leq -60n < -210 \cdot 4; \quad 14 < n \leq 17,5$$

Единственное целое число, удовлетворяющее этим неравенствам, – 15.

Задача 2 (15 баллов).

Учитель готовит задания вида «Найдите НОД (a, b)». В качестве a и b он берет два различных делителя числа 2025 (порядок чисел в паре не имеет значения).

а) Сколько различных вариантов такого задания он может подготовить?

б) Сколько из них имеют ответ НОД (a, b) = 1?

Ответ: а) 105; б) 22.

Решение. $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Каждый делитель является произведением одного из чисел 1, 3, 9, 27, 81 и одного из чисел 1, 5, 25. Таким образом, у нас есть $5 \cdot 3 = 15$ делителей. Мы можем получить несколько различных делителей $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ способами.

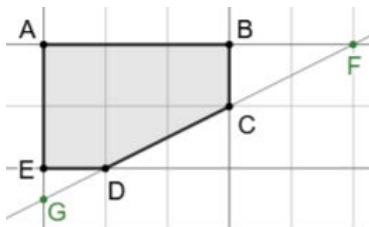
Когда НОД (a, b) = 1? Если $a = 1, b \neq 1$ (14 пар) или a является (положительной) степенью числа 3, а b является степенью числа 5. Таким образом, у нас есть $14 + (5 - 1)(3 - 1) = 22$ пары.

Задача 3 (15 баллов).

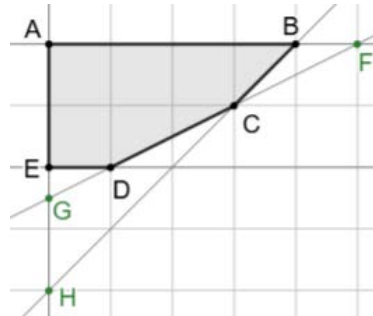
Будем говорить, что треугольник описан около пятиугольника, если каждая сторона треугольника содержит сторону пятиугольника. Начертите выпуклый пятиугольник, около которого можно описать: а) ровно один треугольник; б) ровно два треугольника.

Решение.

а) Прямые $AB \parallel DE$, $AE \parallel BC$.
Треугольник – AFG.



б) Прямые $AB \parallel DE$, углы BCD и CDE – тупые.
Треугольники – AFG и ABH.



Задача 4 (20 баллов).

Миссис Смит покупает коробки с лакомствами, в каждой из которых находится одна из игрушек: либо кукла, либо робот. Прежде чем открыть коробку, она не знает, какая игрушка внутри, но сразу после покупки заглядывает внутрь.

У миссис Смит двое сыновей, и она хочет подарить каждому из них по роботу. Куклы встречаются в три раза чаще, чем роботы. Какова вероятность того, что ей придется купить: а) ровно 3 коробки; б) не менее 4 коробок?

Ответ: а) $\frac{3}{32}$; б) $\frac{27}{32}$.

Решение. а) Вероятность найти в коробке куклу (D) составляет $\frac{3}{4}$, а робота (R) — $\frac{1}{4}$. Миссис Смит придется купить три коробки, если в них находятся игрушки DRR или RDR. Вероятность каждого варианта равна $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$, тогда общая вероятность равна $2 \cdot \frac{3}{64} = \frac{3}{32}$.

б) Пусть X обозначает событие «Миссис Смит купил не менее 4 коробок». Тогда событие «не X» означает, что миссис Смит купила 2 или 3 коробки. Если бы их было только 2, то обе содержали бы роботов, вероятность этого составляет $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Вероятность для 3 ящиков была рассчитана в части а). Итак, $P(\text{не } X) = \frac{1}{16} + \frac{3}{32} = \frac{5}{32}$. Тогда вероятность X равна $1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32}$.

Задача 5 (20 баллов).

Для некоторых $a \neq 1$ параболы с уравнениями $y = ax^2 + x + 1$; $y = x^2 + x + a$ имеют общую касательную (точки касания не обязательно должны совпадать). Докажите, что эта касательная проходит через начало координат.

Решение. Пусть уравнение касательной будет $y = kx + m$.

Способ 1. Прямая является касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$, если она пересекает график этой функции в одной точке, то есть уравнение $ax^2 + bx + c = kx + m$ имеет единственный корень. Это эквивалентно тому, что дискриминант этого уравнения равен 0: $(b - k)^2 - 4a(c - m) = 0$. Запишем это равенство для данных парабол:

$$\begin{cases} (1 - k)^2 - 4a(1 - m) = 0 \\ (1 - k)^2 - 4(a - m) = 0 \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем $4(a - 1)m = 0$. Поскольку $a \neq 1$, то $m = 0$, что и требовалось.

Способ 2. Касательная к $ax^2 + bx + c$ в точке x_0 имеет уравнение

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$$

Пусть общая касательная касается данных парабол в точках x_1, x_2 соответственно. Тогда ее наклон равен $k = 2ax_1 + 1 = 2x_2 + 1$, а свободный член равен $m = -ax_1^2 + 1 = -x_2^2 + a$. Давайте решим эту систему. Из первого уравнения можно выразить $x_2 = ax_1$, тогда $-ax_1^2 + 1 = -(ax_1)^2 + a$; $ax_1^2(a - 1) = a - 1$. Поскольку $a \neq 1$, то $ax_1^2 = 1$, $m = -ax_1^2 + 1 = 0$.

Мы также можем проверить, что для некоторого a общая касательная действительно существует. При $m = 0$ система сводится к уравнению $(1 - k)^2 = 4a$ (или $ax_1^2 = 1$). Это уравнение имеет решение, если $a > 0$. Исключаем значение $a = 0$, так как в этом случае первое исходное уравнение не определяет параболу. Мы видим, что параболы имеют две общие касательные, $y = kx = (1 \pm 2\sqrt{a})x$.

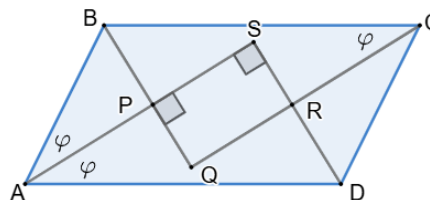
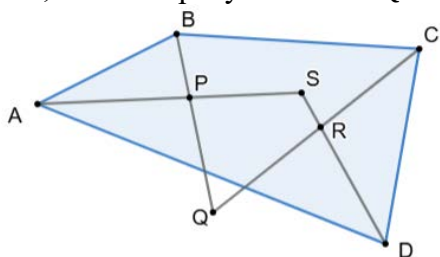
Задача 6 (20 баллов).

В выпуклом четырехугольнике ABCD проведены биссектрисы внутренних углов. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке P, биссектрисы углов B и C пересекаются в точке Q, биссектрисы углов C и D пересекаются в точке R, а биссектрисы углов D и A пересекаются в точке S. Точки пересечения образуют четырехугольник PQRS.

а) Докажите, что четырехугольник PQRS вписанный.

б) Пусть PQRS — квадрат. Докажите, что ABCD — прямоугольник.

Решение. а) Угол $\angle P$ равен $\pi - \frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{\angle C + \angle D}{2}$. Аналогично, $\angle R = \frac{\angle A + \angle B}{2}$, поэтому $\angle Q + \angle R = \pi$. Это доказывает, что четырехугольник PQRS вписанный.



б) Если $\angle P = \frac{\angle C + \angle D}{2} = \frac{\pi}{2}$, то $\angle C + \angle D = \pi$, так что $AD \parallel BC$. Аналогично, $\angle Q = \frac{\angle D + \angle A}{2} = \frac{\pi}{2}$ и $AB \parallel CD$. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Пусть $AB = CD = a, BC = AD = b, (a < b)$; $\angle BAS = \angle SAD = \angle BCQ = \varphi$. Более того, $PS = AS - AP = b \cos \varphi - a \cos \varphi, PQ = BQ - BP = b \sin \varphi - a \sin \varphi$.

Если $PQRS$ квадрат, то $(b - a) \cos \varphi = (b - a) \sin \varphi$. Итак, либо $b = a$ ($ABCD$ – ромб), либо $\cos \varphi = \sin \varphi, \varphi = \frac{\pi}{4}, 2\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($ABCD$ – прямоугольник). Ромб не подходит, так как в этом случае биссектрисы пересекаются в одной точке и не образуют прямоугольник.