

KFU's Interregional Subject Olympiad
profile "Mathematics" (solutions)
for 10-11th grade students
(March 2025)

Problem 1 (10 points).

Peter bought several pens for \$1.5. If he had bought pens for \$1.2, he could have bought 3 more pens for the same money. If he had bought pens for \$2.1, he could have bought 5 fewer pens for the same money. How many pens did Peter buy?

Answer: 15.

Solution. Let Peter bought n pens at \$1.5, spending $150n$ cents. This money is enough for $n+3$ pens at \$1.2, but not enough for $n+4$. That is,

$$120(n+3) \leq 150n < 120(n+4); \quad 120 \cdot 3 \leq 30n < 120 \cdot 4; \quad 12 \leq n < 16$$

For more expensive pens we have

$$210(n-5) \leq 150n < 210(n-4); \quad -210 \cdot 5 \leq -60n < -210 \cdot 4; \quad 14 < n \leq 17.5$$

The only integer that satisfies these inequalities is 15.

Problem 2 (15 points).

The teacher is preparing tasks of the form "Find $GCD(a, b)$ ". As a and b , he takes two different divisors of the number 2025 (the order of the numbers in the pair does not matter).

a) How many different versions of such a task can he prepare?

b) How many of them has the answer $GCD(a, b) = 1$?

Answer: a) 105; b) 22.

Solution. $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Every divisor is a product of one of numbers 1, 3, 9, 27, 81 and one of numbers 1, 5, 25. So we have $5 \cdot 3 = 15$ divisors. We can get a couple of different divisors in $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ ways.

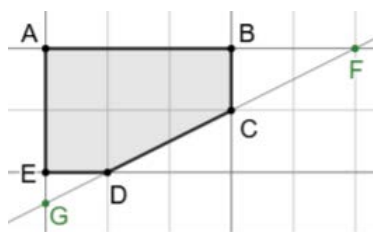
When $GCD(a, b) = 1$? If $a = 1, b \neq 1$ (14 couples) or a is a (positive) power of 3 and b is a power of 5. So we have $14 + (5 - 1)(3 - 1) = 22$ couples.

Problem 3 (15 points).

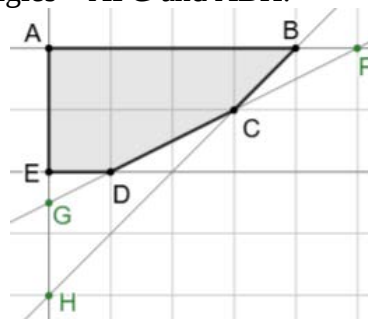
Let's say a triangle is circumscribed about a pentagon if each side of the triangle contains a side of the pentagon. Draw a convex pentagon about which it is possible to circumscribe a) exactly one triangle; b) exactly two triangles.

Solution.

a) Lines $AB \parallel DE$, $AE \parallel BC$. Triangle – AFG.



b) Lines $AB \parallel DE$, angles BCD and CDE are obtuse. Triangles – AFG and ABH.



Problem 4 (20 points).

Mrs. Smith buys boxes of treats, each containing one of the toys: either a doll or a robot. Before opening a box, she doesn't know which toy is inside, but she looks inside immediately after buying the box.

Mrs. Smith has two sons, and she wants to give each of them a robot. Dolls are three times more common than robots. What is the probability that she will have to buy a) exactly 3 boxes; b) at least 4 boxes?

Answer: a) $\frac{3}{32}$; b) $\frac{27}{32}$.

Solution. a) The probability of finding a doll (D) in a box is $\frac{3}{4}$, and a robot (R) is $\frac{1}{4}$. Mrs. Smith will have to buy three boxes if they contain DRR or RDR toys. The probability of each option is $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$, then the overall probability is $2 \cdot \frac{3}{64} = \frac{3}{32}$.

b) Let X denote the event "Mrs. Smith bought at least 4 boxes". Then the event "not X " means that Mrs. Smith bought 2 or 3 boxes. If there were only 2, then both contained robots, the probability of this is $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. The probability for 3 boxes was calculated in part a). So, $P(\text{not } X) = \frac{1}{16} + \frac{3}{32} = \frac{5}{32}$. Then the probability of X is $1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32}$.

Problem 5 (20 points).

For some $a \neq 1$, parabolas with equations $y = ax^2 + x + 1$; $y = x^2 + x + a$ have a common tangent (the points of tangency do not have to coincide). Prove that this tangent passes through the origin.

Solution. Let the equation of a tangent be $y = kx + m$.

Method 1. The line is tangent to the parabola $y = ax^2 + bx + c$ if it intersects the graph of this function at one point, that is, the equation $ax^2 + bx + c = kx + m$ has a single root. This is equivalent to the fact that the discriminant of this equation is 0: $(b - k)^2 - 4a(c - m) = 0$. Let us write this equality for the given parabolas:

$$\begin{cases} (1 - k)^2 - 4a(1 - m) = 0 \\ (1 - k)^2 - 4(a - m) = 0 \end{cases}$$

Subtract the second equation from the first, we get $4(a - 1)m = 0$. Due to $a \neq 1$, we have $m = 0$, Q.E.D.

Method 2. The tangent to $ax^2 + bx + c$ at the point x_0 has the equation

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$$

Let the common tangent touch the given parabolas at points x_1, x_2 respectively. Then its slope is equal to $k = 2ax_1 + 1 = 2x_2 + 1$, and constant term is equal to $m = -ax_1^2 + 1 = -x_2^2 + a$. Let's solve this system. From the first equation we can express $x_2 = ax_1$, so $-ax_1^2 + 1 = -(ax_1)^2 + a$; $ax_1^2(a - 1) = a - 1$. Due to $a \neq 1$, we have $ax_1^2 = 1$, $m = -ax_1^2 + 1 = 0$.

We can also check that for some a , a common tangent does indeed exist. For $m = 0$, the system is reduced to the equation $(1 - k)^2 = 4a$ (or $ax_1^2 = 1$). This equation has a solution if $a > 0$. We exclude the value $a = 0$, since in this case the first original equation does not define a parabola. We see that the parabolas have two common tangents, $y = kx = (1 \pm 2\sqrt{a})x$.

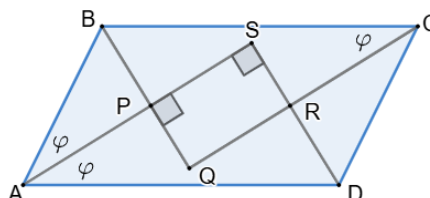
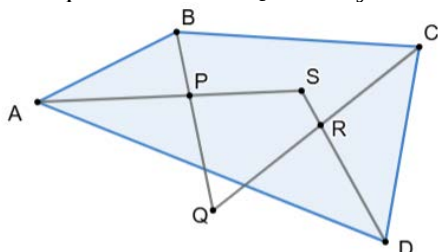
Problem 6 (20 points).

In a convex quadrilateral $ABCD$, the bisectors of the interior angles are drawn. The bisectors of angles A and B intersect at point P , the bisectors of angles B and C intersect at point Q , the bisectors of angles C and D intersect at point R , and the bisectors of angles D and A intersect at point S . The intersection points form the quadrilateral $PQRS$.

a) Prove that quadrilateral $PQRS$ is cyclic.

b) Let $PQRS$ be a square. Prove that $ABCD$ is a rectangle.

Solution. a) The angle $\angle P$ is equal to $\pi - \frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{\angle C + \angle D}{2}$. Similarly, $\angle R = \frac{\angle A + \angle B}{2}$, so, $\angle Q + \angle R = \pi$. This proves that the quadrilateral $PQRS$ is cyclic.



b) If $\angle P = \frac{\angle C + \angle D}{2} = \frac{\pi}{2}$ then $\angle C + \angle D = \pi$, so $AD \parallel BC$. Similarly, $\angle Q = \frac{\angle D + \angle A}{2} = \frac{\pi}{2}$ and $AB \parallel CD$. quadrilateral $ABCD$ is a parallelogram.

Let $AB = CD = a, BC = AD = b, (a < b)$; $\angle BAS = \angle SAD = \angle BCQ = \varphi$. Furthermore, $PS = AS - AP = b \cos \varphi - a \cos \varphi, PQ = BQ - BP = b \sin \varphi - a \sin \varphi$.

If $PQRS$ is a square, then $(b - a) \cos \varphi = (b - a) \sin \varphi$. So, either $b = a$ ($ABCD$ – rhombus), or $\cos \varphi = \sin \varphi, \varphi = \frac{\pi}{4}, 2\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($ABCD$ – rectangle). A rhombus is not suitable, since in this case the bisectors intersect at one point and do not form a rectangle.

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
март 2025 г.

Задача 1 (10 баллов).

Питер купил несколько ручек по 1,5 доллара. Если бы он купил ручки по 1,2 доллара, он мог бы купить еще 3 ручки за те же деньги. Если бы он купил ручки по 2,1 доллара, он мог бы купить на 5 ручек меньше за те же деньги. Сколько ручек купил Питер?

Ответ: 15.

Решение. Пусть Питер купил n ручек по 1,5 доллара, потратив $150n$ центов. Этих денег хватит на $n+3$ ручки по \$1,2, но не хватит на $n+4$. То есть,

$$120(n + 3) \leq 150n < 120(n + 4); 120 \cdot 3 \leq 30n < 120 \cdot 4; 12 \leq n < 16$$

Для более дорогих ручек у нас есть

$$210(n - 5) \leq 150n < 210(n - 4); -210 \cdot 5 \leq -60n < -210 \cdot 4; 14 < n \leq 17,5$$

Единственное целое число, удовлетворяющее этим неравенствам, – 15.

Задача 2 (15 баллов).

Учитель готовит задания вида «Найдите НОД (a, b)». В качестве a и b он берет два различных делителя числа 2025 (порядок чисел в паре не имеет значения).

а) Сколько различных вариантов такого задания он может подготовить?

б) Сколько из них имеют ответ НОД (a, b) = 1?

Ответ: а) 105; б) 22.

Решение. $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Каждый делитель является произведением одного из чисел 1, 3, 9, 27, 81 и одного из чисел 1, 5, 25. Таким образом, у нас есть $5 \cdot 3 = 15$ делителей. Мы можем получить несколько различных делителей $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ способами.

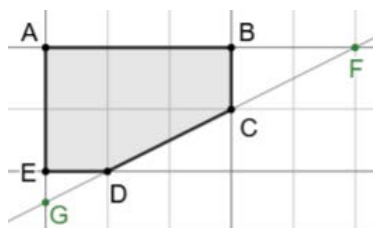
Когда НОД (a, b) = 1? Если $a = 1, b \neq 1$ (14 пар) или a является (положительной) степенью числа 3, а b является степенью числа 5. Таким образом, у нас есть $14 + (5 - 1)(3 - 1) = 22$ пары.

Задача 3 (15 баллов).

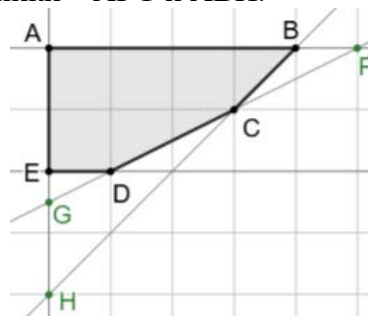
Будем говорить, что треугольник описан около пятиугольника, если каждая сторона треугольника содержит сторону пятиугольника. Начертите выпуклый пятиугольник, около которого можно описать: а) ровно один треугольник; б) ровно два треугольника.

Решение.

а) Прямые $AB \parallel DE, AE \parallel BC$.
Треугольник – AFG .



б) Прямые $AB \parallel DE$, углы BCD и CDE – тупые.
Треугольники – AFG и ABH .



Задача 4 (20 баллов).

Миссис Смит покупает коробки с лакомствами, в каждой из которых находится одна из игрушек: либо кукла, либо робот. Прежде чем открыть коробку, она не знает, какая игрушка внутри, но сразу после покупки заглядывает внутрь.

У миссис Смит двое сыновей, и она хочет подарить каждому из них по роботу. Куклы встречаются в три раза чаще, чем роботы. Какова вероятность того, что ей придется купить: а) ровно 3 коробки; б) не менее 4 коробок?

Ответ: а) $\frac{3}{32}$; б) $\frac{27}{32}$.

Решение. а) Вероятность найти в коробке куклу (D) составляет $\frac{3}{4}$, а робота (R) — $\frac{1}{4}$. Миссис Смит придется купить три коробки, если в них находятся игрушки DRR или RDR. Вероятность каждого варианта равна $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$, тогда общая вероятность равна $2 \cdot \frac{3}{64} = \frac{3}{32}$.

б) Пусть X обозначает событие «Миссис Смит купила не менее 4 коробок». Тогда событие «не X» означает, что миссис Смит купила 2 или 3 коробки. Если бы их было только 2, то обе содержали бы роботов, вероятность этого составляет $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Вероятность для 3 коробок была рассчитана в части (а). Итак, $P(\text{не } X) = \frac{1}{16} + \frac{3}{32} = \frac{5}{32}$. Тогда вероятность X равна $1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32}$.

Задача 5 (20 баллов).

Для некоторых $a \neq 1$ параболы с уравнениями $y = ax^2 + x + 1$; $y = x^2 + x + a$ имеют общую касательную (точки касания не обязательно должны совпадать). Докажите, что эта касательная проходит через начало координат.

Решение. Пусть уравнение касательной будет $y = kx + m$.

Способ 1. Прямая является касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$, если она пересекает график этой функции в одной точке, то есть уравнение $ax^2 + bx + c = kx + m$ имеет единственный корень. Это эквивалентно тому, что дискриминант этого уравнения равен 0: $(b - k)^2 - 4a(c - m) = 0$. Запишем это равенство для данных парабол:

$$\begin{cases} (1 - k)^2 - 4a(1 - m) = 0 \\ (1 - k)^2 - 4(a - m) = 0 \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем $4(a - 1)m = 0$. Поскольку $a \neq 1$, то $m = 0$, что и требовалось.

Способ 2. Касательная к $ax^2 + bx + c$ в точке x_0 имеет уравнение

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$$

Пусть общая касательная касается данных парабол в точках x_1, x_2 соответственно. Тогда ее угловой коэффициент равен $k = 2ax_1 + 1 = 2x_2 + 1$, а свободный член равен $m = -ax_1^2 + 1 = -x_2^2 + a$. Давайте решим эту систему. Из первого уравнения можно выразить $x_2 = ax_1$, тогда $-ax_1^2 + 1 = -(ax_1)^2 + a$; $ax_1^2(a - 1) = a - 1$. Поскольку $a \neq 1$, то $ax_1^2 = 1$, $m = -ax_1^2 + 1 = 0$.

Мы также можем проверить, что для некоторого a общая касательная действительно существует. При $m = 0$ система сводится к уравнению $(1 - k)^2 = 4a$ (или $ax_1^2 = 1$). Это уравнение имеет решение, если $a > 0$. Исключаем значение $a = 0$, так как в этом случае первое исходное уравнение не определяет параболу. Мы видим, что параболы имеют две общие касательные, $y = kx = (1 \pm 2\sqrt{a})x$.

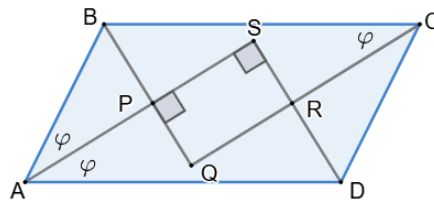
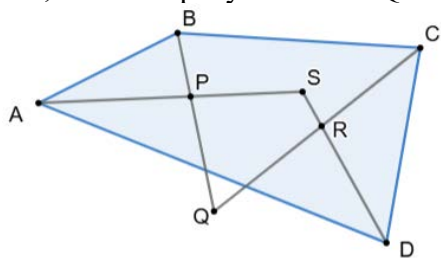
Задача 6 (20 баллов).

В выпуклом четырехугольнике ABCD проведены биссектрисы внутренних углов. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке P, биссектрисы углов B и C пересекаются в точке Q, биссектрисы углов C и D пересекаются в точке R, а биссектрисы углов D и A пересекаются в точке S. Точки пересечения образуют четырехугольник PQRS.

а) Докажите, что четырехугольник PQRS вписанный.

б) Пусть PQRS — квадрат. Докажите, что ABCD — прямоугольник.

Решение. а) Угол $\angle P$ равен $\pi - \frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{\angle C + \angle D}{2}$. Аналогично, $\angle R = \frac{\angle A + \angle B}{2}$, поэтому $\angle Q + \angle R = \pi$. Это доказывает, что четырехугольник PQRS вписанный.



б) Если $\angle P = \frac{\angle C + \angle D}{2} = \frac{\pi}{2}$, то $\angle C + \angle D = \pi$, так что $AD \parallel BC$. Аналогично, $\angle Q = \frac{\angle D + \angle A}{2} = \frac{\pi}{2}$ и $AB \parallel CD$. Четырехугольник ABCD – параллелограмм.

Пусть $AB = CD = a, BC = AD = b, (a < b)$; $\angle BAS = \angle SAD = \angle BCQ = \varphi$. Более того, $PS = AS - AP = b \cos \varphi - a \cos \varphi, PQ = BQ - BP = b \sin \varphi - a \sin \varphi$.

Если PQRS квадрат, то $(b - a) \cos \varphi = (b - a) \sin \varphi$. Итак, либо $b = a$ (ABCD – ромб), либо $\cos \varphi = \sin \varphi, \varphi = \frac{\pi}{4}, 2\varphi = \frac{\pi}{2}$ (ABCD – прямоугольник). Ромб не подходит, так как в этом случае биссектрисы пересекаются в одной точке и не образуют прямоугольник.