Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2025–26 учебный год
5 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Расставьте по кругу десять натуральных чисел 1, 2, ..., 10 в таком порядке, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была составным числом. Число n называется составным, если оно делится нацело на какое-то число, кроме 1 и n. *Достаточно привести один пример.* (20 баллов)

Решение. Можно расставить, например, так: 1, 5, 3, 4, 2, 6, 7, 8, 9, 10. Этот пример можно придумать следующим образом. Заметим, что сумма любых трех подряд идущих натуральных чисел делится на 3. Две суммы на стыке будут равна $9 + 10 + 1 = 20$ и $10 + 1 + 2 = 13$. Последнее число составным не является. Поменяем местами 2 и 5, тогда делимость на 3 трех подряд идущих чисел не пропадет, а последняя сумма станет равна $10 + 1 + 6 = 16 = 2^4$.

Критерии. Любой верный пример — *20 баллов.*

Задание 2. На олимпиаде оказалось, что 56 учеников не взяли с собой тетрадь. У всех детей, кроме 40, нет ручки. Оказалось, что детей без ручки столько же, сколько и таких детей, кто взял ручку, но не взял тетрадь. Половина из тех, у кого есть тетрадь, не имеет ручки. Сколько всего детей пришло на олимпиаду? *Не забудьте объяснить свой ответ или ответы и доказать, почему других нет.* (20 баллов)

Ответ. 72.

Решение. Пусть тетрадь есть у $2x$ учеников. Половина из них, то есть x, пришла без ручки, а вторая половина (тоже x) имеет с собой и ручку. Из условия задачи следует, что ручки взяли 40 человек. Поэтому $40 - x$ детей взяли ручки, но не взяли тетради. А так как всего 56 детей не взяли тетради, то $56 - (40 - x) = x + 16$ не взяли ни тетрадь, ни ручку.

Таким образом, всего детей без ручки $x + (x + 16)$, а тех, кто с ручкой, но без тетради — $40 - x$. По условию эти выражения равны, поэтому $2x + 16 = 40 - x$, откуда получаем $3x = 24$ и $x = 8$. Следовательно, всего детей было $16 + (40 - 8) + (8 + 16) = 72$.

Второе решение. Пусть a детей взяли и ручку, и тетрадь, b детей взяли только тетрадь, c детей взяли только ручку, а d детей не взяли ни того, ни другого. Тогда из условий следует система уравнений:

$$c + d = 56, \quad a + c = 40, \quad b + d = c, \quad \frac{1}{2}(a + b) = b.$$

Последнее уравнение означает, что $a = b$, поэтому из третьего уравнения следует, что $c = a + d$. Сложим первое и второе уравнение: $a + d + 2c = 96$. Подставим сюда c вместо $a + d$, и получим, что $3c = 96$, откуда $c = 32$. Тогда из первого уравнения $d = 24$, а из второго — $a = 8$. Поэтому $b = 8$ и $a + b + c + d = 8 + 8 + 32 + 24 = 72$.

Критерии. Только верный ответ без проверки, что он подходит — *3 балла.*

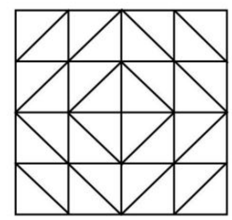
Только верный ответ с проверкой, что он подходит — *6 баллов.*

Верно составлено уравнение или система уравнений — *8 баллов.*

Из верно составленного уравнения (системы уравнений) найдены какие-то из четырех чисел — *по 3 балла за число.* Этот критерий суммируется с предыдущим.

Верно составлено уравнение или система уравнений, а дальше без его/ее решения приведен верный ответ без проверки — *10 баллов.* Этот критерий не суммируется ни с каким другим.

Верно составлено уравнение или система уравнений, а дальше без его/ее решения приведен верный ответ с проверкой — *12 баллов.* Этот критерий не суммируется ни с каким другим.



Задание 3. Все клетки доски 4×4 разбиты диагоналями на 32 треугольника, как показано на рисунке. Аня и Ваня каждым ходом по очереди закрашивают по одному такому треугольнику. Аня красит в синий цвет, а Ваня — в красный. Второй раз красить один и тот же треугольник нельзя. После того, как все треугольники покрашены, игра заканчивается. Если найдётся составленный из треугольников синий квадрат (любого размера), то выигрывает Аня, а если не найдется — то Ваня. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. Аня.

Решение. Пусть Аня по очереди красит треугольники с вершиной в центре доски. Если в ответ на какой-то из ее ходов Ваня не закрасит второй треугольник в той же клетке, то следующим ходом его закрасит Аня и выиграет. Поэтому Ваня вынужден красить треугольник в той же клетке. Но в таком случае Аня за первых четыре хода сможет закрасить четыре центральных треугольника. Они образуют повернутый на $45°$ синий квадрат.

Критерии. Только ответ — *0 баллов.*

Верная стратегия без обоснования — *12 баллов.*

Задание 4. Набор юного конструктора состоит из всевозможных клетчатых прямоугольников (в том числе и квадратов), обе стороны которых меньше 7, причем все прямоугольники в наборе разные. Миша купил один набор и сложил из его деталек несколько квадратов 6×6. Могла ли у него остаться неиспользованной ровно одна деталь? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. Не могла.

Решение. Посчитаем общую площадь фигурок одного набора: $1 \cdot (1+2+\ldots+6) + 2 \cdot (2+\ldots+6) + \ldots + 5 \cdot (5+6) + 6 \cdot 6 = 266 = 36 \cdot 7 + 14$. Поэтому, когда Миша составит квадраты из своих деталей, площадь оставшейся детали будет иметь остаток 14 при делении на 36. При этом площадь одной детали не превосходит 36. Следующее после 14 такое число — это $14 + 36 = 50 > 36$. Следовательно, площадь оставшейся детали может равняться только 14. Прямоугольник площади 14 может иметь размеры 2×7 и 1×14, но таких деталей в конструкторе нет. Поэтому ровно одна деталь остаться не могла.

Критерии. Верно подсчитана площадь всех деталек — *6 баллов.*

Верно подсчитан остаток от деления суммы — *еще 4 балла.*

Задание 5. У Мерлина есть шесть монет, из которых две — фальшивые: одна на 1 грамм легче настоящих, а другая на 1 грамм тяжелее настоящих. Все четыре настоящие монеты весят одинаково. Как Мерлину за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь найти обе фальшивые монеты, и определить, какая из них легче, а какая — тяжелее? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Решение. Разобьем монеты на три пары. Первыми тремя взвешиваниями сравним между собой монеты в парах.

1) Предположим, что фальшивые монеты попали в одну пару. Тогда в двух других парах весы покажут равновесие, а тяжелая фальшивая — та, что перевесила в своей паре.

2) Пусть фальшивые монеты — по одной в двух парах. Тогда весы покажут равновесие только в одной паре — той, где были две настоящие монеты. Возьмем две более тяжелые монеты из двух других пар. Среди них обязательно одна тяжелая фальшивая и одна настоящая. Сравнив их четвертым взвешиванием, мы узнаем, что перевесившая из них — тяжелая фальшивая, а более легкая — настоящая. Легкая фальшивая — это вторая монета из той пары, в которой была настоящая монета.

Критерии. Верный алгоритм без обоснования — *10 баллов.*