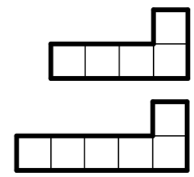
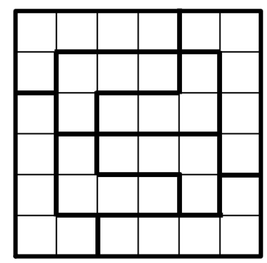
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2025–26 учебный год
6 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Назовем *уголком* любую клетчатую фигурку следующего вида: это клетчатый прямоугольник ширины 1, к крайней клетке которого в перпендикулярном направлении пристроена еще одна клетка. Например, на картинке изображены уголки из пяти клеток и из шести клеток. Разрежьте квадрат 6×6 клеток без остатка на уголки, использовав только два вида одинаковых уголков, причем ни в одном уголке количество клеток не должно делиться на 3 (то есть, должны быть использованы только уголки, состоящие из a клеток и из b клеток, где a и b — различные натуральные числа, не кратные 3). Уголки можно поворачивать и переворачивать. *Достаточно привести один пример.* (20 баллов)



Решение. Можно использовать, например, по четыре уголка, состоящих из четырех и пяти клеток соответственно.



Критерии. Любой верный пример — *20 баллов.*

Задание 2. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 72, в записи которого используются только цифры 8 и 9, причем обе цифры присутствуют. *Не забудьте объяснить свой ответ или ответы и доказать, почему других нет.* (20 баллов)

Ответ. 8888889888.

Решение. Обозначим это число буквой N. Поскольку число N делится на 72, оно делится и на 9. Тогда сумма его цифр кратна 9. Так как в нем по условию присутствуют восьмерки, их количество должно делиться на 9 (так как числа 8 и 9 взаимно просты). Поэтому в числе должно быть минимум 10 цифр — минимум одна девятка и минимум 9 восьмерок.

Поскольку число N делится на 72, оно делится и на 8. По признакам делимости на 2, 4 и 8 это означает, что 1) последняя цифра — четная, 2) число, составленное из двух последних цифр N должно делиться на 4, 3) число, составленное из трех последних цифр N должно делиться на 8. Предпоследняя цифра числа N не может быть равна 9, так как 98 не делится на 4. Поэтому N оканчивается на 88. Третья с конца цифра не может быть равна 9, так как 988 не делится на 8. Поэтому N оканчивается на 888. Отсюда следует, что цифра 9 в числе N может находиться не ранее четвертого места с конца. Но число 8888889888 подходит, оно делится на 72.

Критерии. Только верный ответ — *4 балла.*

Доказано, что в числе должно быть минимум 9 восьмерок и одна девятка — *8 баллов.* Этот критерий суммируется с предыдущим и с последующим.

Доказано, что последние три цифры — восьмерки — *по 4 балла за каждую.*

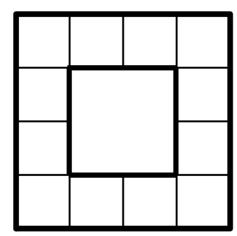
Задание 3. В двух цехах имеется поровну ткацких станков одинаковой производительности. Поступили два заказа на производство ткани — первый в два раза больше второго. Оба цеха в первый день работали над первым заказом. Во второй день первый цех продолжал работу, а второй переключился на второй заказ. К концу второго дня первый заказ был выполнен. В третий день над вторым заказом работали всего пять станков и к концу дня закончили выполнение второго заказа. Сколько всего станков на фабрике? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 20.

Решение. Пусть в цехах по n станков. Для выполнения первого заказа потребовалось $3n$ станкодней. Второй заказ вдвое меньше, следовательно, требует $3n/2$ станкодней. При этом n из них выполнено за второй день. В третий день осталось выполнить $n/2$ станкодней. Это означает, что нужно использовать половину мощности одного цеха. С другой стороны, это потребовало 5 станков. Поэтому в одном цеху 10 станков.

Критерии. Только ответ с проверкой — *4 балла.*

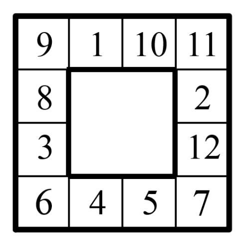
Задание 4. В клетки рамки, показанной на рисунке, в некотором порядке расставлены натуральные числа от 1 до 12, каждое — по одному разу. Будем говорить, что два числа *дружат*, если они стоят на одной стороне рамки (в нижнем ряду, в верхнем, в правом или в левом). Пусть N — наименьшая сумма двух дружащих чисел. Чему равно наибольшее возможное значение числа N (по всем расстановкам)? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)



Ответ. 9.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим числа 1, 2, 3, 4, 5. Их пять штук, поэтому какие-то два обязательно окажутся на одной стороне рамки и, следовательно, будут дружить. Сумма любых двух из них не превосходит 9, поэтому $N \leqslant 9$.

Пример. В расстановке, показанной на картинке, наименьшая сумма двух дружащих чисел равна 9.



Критерии. Только верный пример — *8 баллов.*

Только оценка — *10 баллов.*

Задание 5. На очень длинной ленте в одну сторону 1000 раз подряд выписана последовательность чисел 1, 2, ..., 33. Числа выписаны через пробел. Даша умеет проводить только одну операцию: стирать с ленты одинаковые числа, если между ними находится нечетное количество еще не стертых чисел. Сможет ли Даша так сделать, чтобы после некоторого числа таких операций какие-нибудь два одинаковых числа шли подряд? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. Да, может.

Решение. Зафиксируем две соседние единицы (например, первую и вторую, стоящую изначально на 34-м месте). Покажем, как последовательно убрать все числа между ними.

Пусть между ними есть еще не убранное число a ($2 \leqslant a \leqslant 33$). Выберем первые два подряд идущих блока 1, 2, $\ldots$, 33, в которых еще до сих пор не было стерто ни одного числа. В каждом из них есть число a. Если между тем числом a, которое мы хотим убрать, и числом a из первого блока стоит N чисел, то между ним и числом a из второго блока стоит $N + 33$ чисел. Одно из чисел N и $N + 33$ будет нечетным, так как их разность нечетна. Поэтому Даша сможет стереть число a между двумя выбранными ей единицами. При этом она «потратит» два подряд идущих блока 1, 2, $\ldots$, 33, в которых еще до сих пор не было стерто ни одного числа. Изначально таких блоков у нее $1000 - 2 = 998$ (две единицы входят в первые два блока). А при таком алгоритме ей хватит даже $2 \cdot 32 = 64$ блока.

Критерии. Верный алгоритм без обоснования — *10 баллов*.