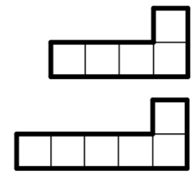
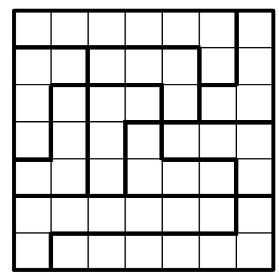
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2025–26 учебный год
7 класс
Решения задач и критерии оценивания



Задание 1. Барон Мюнхгаузен называет *уголком* любую клетчатую фигурку следующего вида: это клетчатый прямоугольник размера $1 \times n$, где $n \geqslant 3$, к крайней клетке которого в перпендикулярном направлении пристроена еще одна клетка. Таким образом, в уголке у барона всегда не менее четырех клеток. Например, на картинке изображены уголки из пяти клеток и из шести клеток. Барон утверждает, что может разрезать квадрат 7×7 клеток без остатка на уголки, использовав только два вида одинаковых уголков (то есть, только уголки, состоящие из a клеток и из b клеток, где a и b — различные натуральные числа). Прав ли барон? Уголки можно поворачивать и переворачивать. *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)



Ответ. Прав.

Решение. На рисунке показано разрезание квадрата 7×7 на три уголка, состоящих из семи клеток, и семь уголков, состоящих из четырех клеток.

Критерии. Любой верный пример — *20 баллов.*

В примере использован уголок из трех клеток, запрещенный условием — *0 баллов.*

Задание 2. В магазине техники для дома при покупке более чем на 50000 рублей полагается скидка. В черную пятницу магазин объявил ещё об одной скидке. Воспользовавшись двумя последовательными скидками, покупатель приобрёл холодильник, стоящий 69000 руб., всего за 60306 руб. На сколько процентов были скидки, если известно, что каждая составляла целое число процентов, не большее 20? *Не забудьте объяснить свой ответ или ответы и доказать, почему других нет.* (20 баллов)

Ответ. На 5% и 8%.

Решение. В результате применения скидок цена умножается на $p/100$ и $q/100$, где p и q — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $90 \leqslant p, q < 100$. Поэтому $60306 = 69000pq/10000$, откуда $pq = 8740$. Поскольку разложение числа 8740 на простые множители имеет вид $2^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23$, одно из чисел p и q должно делиться на 19, а другое — на 23. Действительно, числа 19 и 23 — простые и $19 \cdot 23 > 100$, поэтому одно число (например, p) не может делиться и на 19, и на 23 одновременно. От 80 до 100 есть только два таких числа — 92 (делится на 23) и 95 (делится на 19). Действительно, $8740 = 95 \cdot 92$, следовательно, скидки были на 5 и 8 процентов соответственно.

Замечание. Доказать, что числа p и q — это 92 и 95, можно и по-другому. Их произведение 8740 делится на 5. Поэтому один из множителей должен быть кратен 5. С учетом того, что $p, q \geqslant 80$, этот множитель может равняться только 80, 85, 90 или 95. Но 8740 не делится нацело на 90 (ибо не делится на 9, так как сумма цифр равна 19). Также оно не делится на 85 (ибо не делится на 17), и на 80 (ибо не делится на 16). Поэтому кратный 5 множитель может равняться только 95. Тогда второй множитель равен $8740/95 = 92$.

Еще одно рассуждение состоит в том, что (очевидно) $8740/85 > 100$, поэтому числа 85 и 80 точно не могут подходить.

Критерии. Показано, что общая скидка была на 8740 рублей — *4 балла.*

После этого найден ответ подбором, либо только сформулирован, но не доказано, что он единственный — еще *6 баллов.*

Задание 3. Натуральное число n называется *красивым*, если в его десятичной записи встречаются только цифры 0, 1 или 2. При каком наименьшем k любое натуральное число можно представить в виде суммы не более, чем k красивых чисел? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 5.

Решение. *Оценка.* Заметим, что число 9 нельзя получить, сложив не более, чем четыре красивых числа, так как $2 \cdot 4 < 9$.

Пример. С другой стороны, любое число можно получить в виде суммы пяти красивых чисел. Это можно сделать поразрядно — достаточно в каждом разряде складывать необходимое количество двоек, единиц или нулей соответственно (любую цифру от 0 до 5 можно получить, складывая нули и единицы, а любую цифру от 6 до 9 — складывая двойки и единицы).

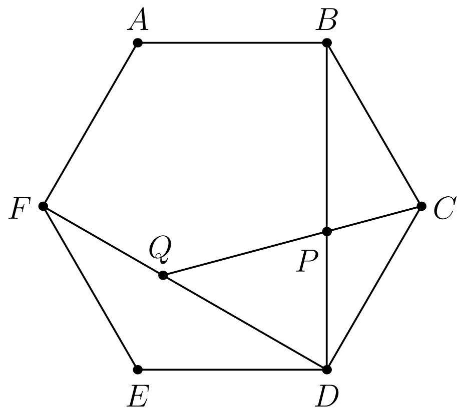
Критерии. Доказано, что $k \geqslant 5$ — *10 баллов.*

Показано, что $k = 5$ всегда достаточно — *10 баллов.*

Задание 4. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, длина стороны которого равна a. Точки P и Q лежат на отрезках BD и DF соответственно, причем $BP = DQ = a$. Докажите, что точки C, P и Q лежат на одной прямой. В правильном шестиугольнике все стороны равны, а все углы составляют по $120°$. *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Решение. Треугольник BCD — равнобедренный, угол при вершине C равен $120°$. Это означает, что углы при основании равны $\angle CBD = \angle CDB = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$. Аналогично, $\angle EDF = 30°$. По условию, треугольник BPC — равнобедренный, угол при вершине B равен $30°$. Это означает, что $\angle BPC = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$. Поэтому смежный с ним $\angle CPD = 105°$.

Далее, $\angle QDB = 120° - \angle EDF - \angle CDB = 60°$. Поэтому $\angle QDC = 60° + 30° = 90°$. По условию, треугольник DQC — равнобедренный, следовательно, $\angle DQC = \frac{1}{2}(180° - 90°) = 45°$. Из треугольника DPQ теперь следует, что $\angle DPQ = 180° - 45° - 60° = 75°$. Наконец, из того, что сумма углов $\angle DPQ$ и $\angle DPC$ равна $75° + 105° = 180°$, следует, что точки Q, P и C лежат на одной прямой.



Критерии. Найдены углы треугольника BPC — *4 балла.*

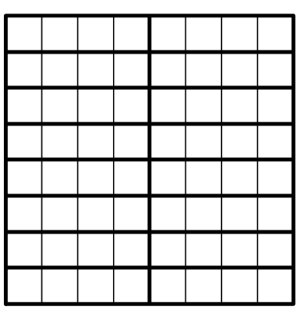
Найден $\angle PDQ$ — *4 балла.*

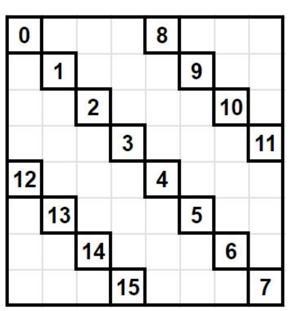
Найден $\angle DQC$ — *4 балла.* Эти критерии суммируются.

Задание 5. На доску 8×8 ровно в полдень собирается приземлиться невидимый космический корабль. Вам известно, что корабль имеет форму прямоугольника 1×4 и, приземлившись, займет в точности четыре клетки доски. Вы можете заранее поставить в некоторые клетки доски фарфоровые чашки (в каждую клетку можно ставить любое количество чашек). Когда корабль приземлится, он разобьет все чашки, которые находятся во всех клетках, на которые он приземлился. Вы не увидите, куда именно приземлится корабль, но по звуку сможете точно определить, сколько именно чашек разбилось (в частности, что не разбилось ни одной чашки, если такое случилось). Какое наименьшее количество чашек нужно поставить на доску, чтобы гарантированно определить хотя бы одну клетку, занятую кораблем? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 120.

Решение. *Оценка.* Квадрат 8×8 можно разбить на 16 непересекающихся прямоугольников 1×4 (см. первый рисунок). Таким шестнадцати расположениям корабля должно соответствовать 16 различных количеств разбитых чашек. Действительно, если каким-то двум расположениям соответствует одно и то же количество разбитых чашек, то услышав именно это число, мы должны будем указать клетку, принадлежащую одновременно двум прямоугольникам. Но эти прямоугольники не пересекаются. Итого, чашек должно быть не менее $0+1+2+\ldots+15=120$.





Пример. Отметим главную диагональ, а также две диагонали из четырех клеток, параллельные ей. Поставим в отмеченные клетки 0, 1, 2, ..., 15 чашек (см. второй рисунок). Заметим, что любой корабль 1×4 займет ровно одну отмеченную клетку. Следовательно, услышав сколько чашек разбилось, мы однозначно определим, какую именно отмеченную клетку он занял.

Критерии. Только оценка — *10 баллов.*

Только пример — *10 баллов.*

Задача (или только оценка, или только пример) решена в предположении, что корабль должен разбить хотя бы одну чашку (то есть, для суммы $1+2+\ldots+16=136$ — *по минус 2 балла за оценку и за пример.*