Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2025–26 учебный год
8 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Артур написал натуральное число. После этого он посчитал сумму его цифр, умножил ее на 5 и обнаружил, что если возвести результат в квадрат, то получится исходное число. Какое число мог написать Артур? *Достаточно привести один пример и показать, что он подходит.* (20 баллов)

Ответ. Подходит число $2025 = 45^2$. Это не единственный ответ, еще подходят числа $400 = 20^2$, $4225 = 65^2$.

Решение. Понятно, что записанное число N делится на 5 и является точным квадратом. После этого достаточно перебрать квадраты первых нескольких чисел из ряда 5, 10, 15, 20, ..., чтобы найти хотя бы один ответ. Других примеров до 1 000 000, кроме приведенных в ответе, не существует.

Критерии. Любой верный пример — *20 баллов.*

Задание 2. На острове живут рыцари (всегда говорят только правду), лжецы (всегда лгут) и хитрецы (могут говорить как правду, так и ложь на свое усмотрение). В компании из шести человек имеются один рыцарь, два хитреца и три лжеца. Путешественник, знающий об этом, спросил каждого из них, кем тот является. Первый сказал о себе, что он рыцарь, второй — что лжец, третий — что хитрец, четвёртый — что не рыцарь, пятый — что не лжец, а шестой — что не хитрец. Сможет ли путешественник определить, кто из них кем является? *Не забудьте обосновать свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. Сможет. Первый, третий и пятый — лжецы. Второй и четвертый — хитрецы. Шестой — рыцарь.

Решение. Назвать себя лжецом не могут ни рыцарь, ни лжец. Поэтому второй — хитрец. Аналогично, сказать про себя, что он — не рыцарь, не могут ни рыцарь, ни лжец. Следовательно, четвертый — тоже хитрец.

На этом хитрецы закончились. Среди остальных три лжеца и один рыцарь. Значит, шестой сказал правду (хитрецов больше нет) и он — рыцарь. Все остальные — лжецы, и они на самом деле могли дать такие ответы.

Критерии. Только ответ с проверкой, что он подходит — *4 балла.*

Верно определен один хитрец — *4 балла.*

Верно определены два хитреца — *8 баллов. Эти критерии суммируются с первым.*

Задание 3. Некоторые клетки квадрата 10×10 покрашены в один из пяти разных цветов так, что ни в какой строке и ни в каком столбце нет клеток разных цветов. Количество клеток каждого цвета одинаковое. Какое наибольшее количество клеток может быть покрашено? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 20.

Решение. Предположим, что клеток какого-го цвета хотя бы пять. Тогда сумма количеств строк и столбцов, которые они занимают, будет не меньше 5. Действительно, если они стоят все в одной строке, то они займут не меньше пяти столбцов. Если в двух строках — то не меньше трех столбцов. Если в трех строках, то не меньше двух столбцов. Если строк хотя бы четыре, то есть как минимум один столбец.

Таким образом, если клеток каждого цвета хотя бы пять, то все вместе они займут хотя бы $5 \cdot 5 = 25$ строк и столбцов. Это противоречит тому, что всего строк и столбцов имеется 20. Поэтому клеток каждого цвета не более четырех. Тогда и всего закрашенных клеток не более 20. Пример показан на картинке.

1	1								
1	1								
		2	2						
		2	2						
				3	3				
				3	3				
						4	4		
						4	4		
								5	5
								5	5

Критерии. Только оценка — *10 баллов.*

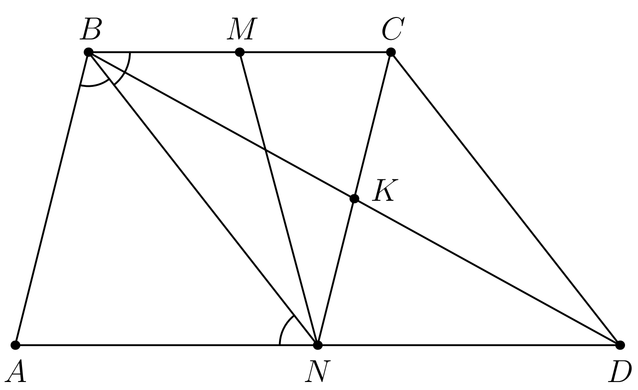
Только пример — *8 баллов.*

Задание 4. В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно боковой стороне AB. Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Оказалось, что $\angle ABN = \angle CBN$. Чему равно отношение BD/MN? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 2.

Решение. Заметим, что $\angle CBN = \angle ANB$ как накрест лежащие, поэтому $\angle ABN = \angle ANB$ и, следовательно, треугольник ABN — равнобедренный, $AB = AN$. Из того, что $BC = AB$, следует, что в четырехугольнике $ABCN$ противоположные стороны параллельны и равны, поэтому он — параллелограмм. Но в нем еще равны стороны AB и BC и следовательно, он — ромб и $CN = BC$. Кроме того, так как точка M середина отрезка AD, имеем $DN = AN = BC$, поэтому $BCDN$ — параллелограмм.

Пусть точка K — середина CN. Тогда $BD = 2BK = 2MN$, так как в равнобедренном треугольнике BCN равны медианы BK и NM. Следовательно, $BD : MN = 2$.



Критерии. Доказано, что $AB = AN$ — *2 балла.*

Доказано, что $BC = CN$ — *4 балла.*

Доказано, что $BCDN$ — параллелограмм — *2 балла. Все эти критерии суммируются друг с другом.*

Задание 5. Учитель выбрал натуральное число $n > 3$ и записал на доске все дроби

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n}{n-1}.$$

Отличник Вася в некоторых из них поменял местами числитель и знаменатель (например, дробь $\frac{3}{2}$ могла превратиться в $\frac{2}{3}$). Оказалось, что после этого произведение всех дробей на доске стало равно 1. Чему могло быть равно n? *Укажите все возможные ответы и объясните, почему других нет.* (20 баллов)

Ответ. n — точный квадрат, больший единицы.

Решение. *Оценка.* Пусть в какой-то момент произведение дробей на доске равно P. Если после этого перевернуть дробь $\dfrac{a}{b}$, то это равносильно тому, что произведение разделится на $\dfrac{a}{b}$, а потом умножится на $\dfrac{b}{a}$. Таким образом, оно станет равно $P \cdot \dfrac{b^2}{a^2}$. Отсюда следует, что если Вася переворачивал дроби $\dfrac{a_1}{b_1}, \ldots, \dfrac{a_k}{b_k}$, то изначальное произведение всех дробей на доске в результате умножится на $\dfrac{b_1^2 \ldots b_k^2}{a_1^2 \ldots a_k^2}$, то есть, на квадрат некоторой рациональной дроби $\dfrac{p^2}{q^2}$. Будем сразу считать эту дробь несократимой (ясно, что если какие-то простые множители в числителе и знаменателе — общие, то и сверху и снизу они будут в четной степени и после их сокращения дробь снова будет иметь вид $\dfrac{p^2}{q^2}$).

Очевидно, что в начале произведение всех дробей равно

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} = n.$$

Таким образом, для того, чтобы в конце оно стало равно 1, необходимо выполнение равенства

$$n \cdot \frac{p^2}{q^2} = 1.$$

Оно в свою очередь означает, что $n = \dfrac{q^2}{p^2}$. Но так как НОД$\,(p, q) = 1$, а число n — целое, из этого следует, что на самом деле $p = 1$ и тогда n — это точный квадрат.

Пример. Покажем, что если $n = q^2$ для некоторого натурального числа $q \geqslant 2$, то Вася сможет получить единицу. Из доказательства оценки следует, что ему достаточно найти одну или несколько дробей, произведение которых равно q, и перевернуть их все. Заметим, что

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{q}{q-1} = q$$

(при $n = 2^2 = 4$ в этом произведении есть только первая дробь). Следовательно, он может взять как набор дробей

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{q}{q-1},$$

так и набор всех остальных дробей

$$\frac{q+1}{q},\ \frac{q+2}{q+1},\ \ldots,\ \frac{q^2}{q^2-1}.$$

Перевернув все дроби любого из этих наборов, Вася добьется того, что произведение всех дробей на доске станет равно 1.

Критерии. Только оценка — *10 баллов.*

Только пример — *10 баллов.*