Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика», заключительный этап
2025/26 учебный год

9 класс

Задача 1 (20 баллов). Старенький будильник Аделаиды Ивановны спешит на 3 минуты в час. В полночь она поставила его точно. Когда будильник показывал час ночи, Аделаида Ивановна переставила его на 3 минуты назад. Каково будет истинное время, когда будильник прозвонит в 8 утра?

Ответ: 7 часов 40 минут.

Решение. Не важно, во сколько А.И. переставила будильник. Когда он показывал 8 утра, без перестановки на нем было бы 8:03, то есть с полуночи прошло 8 ч 3 мин = 483 минуты по неправильным часам. Но 63 неправильные минуты составляют 60 правильных, так что прошло $\frac{483\cdot 60}{63} = 460$ истинных минут, то есть на 20 минут меньше, чем 8 часов. Значит, на верных часах в этот момент 7:40.

Замечание. Один из основных источников ошибок – считать, что правильные часы отстают от будильника на 3 минуты в «час» (час будильника). На самом деле за 60 «неправильных минут» проходит $60\cdot\frac{60}{63} = \frac{400}{7} = 57\frac{1}{7}$ минут на правильных часах. Именно в этот момент А.И. сделала перестановку стрелок. Потерянная 1/7 дает неправильный ответ, хотя и близкий к истинному.

Заметим, что, за счет перестановки стрелок, в истинное время 1:00 будильник показывал 1:00, а, например, в истинное время 2:00 будильник показывал 2:03 и т.п. Такой расчет может дать правильный ответ.

Критерии. Неправильное описание процесса – 0 баллов, даже если получен верный ответ (например, за счет округления). Верная модель процесса и правильный ответ – 20 баллов.

Задача 2 (20 баллов). Вовочка решает уравнение вида $\sqrt{x+b} = x - a$ с конкретными значениями параметров a и b. Он переписал его в виде $x + b = (x-a)^2$ и решил полученное квадратное уравнение, у которого оказалось два различных корня. При каком соотношении между a и b ровно один из этих корней лишний для исходного уравнения?

Ответ: $a + b > 0$

Решение. Лишние корни могут появиться, если преобразование неравносильное. Квадратное уравнение может выполняться при отрицательных $x - a$, а в исходном уравнении обязательно выполнено $x - a \geq 0$, т.е. $x \geq a$. Значит, условие задачи можно переписать в виде $x_1 < a \leq x_2$, где x_1, x_2 – корни полученного Вовочкой квадратного уравнения.

Заметим, что ОДЗ проверять не надо, так как $x + b = (x-a)^2 \geq 0$ заведомо выполняется для найденных корней.

1 способ. Квадратное уравнение имеет вид $x^2 - (2a+1)x + a^2 - b = 0$, дискриминант равен

$$D = (2a+1)^2 - 4(a^2 - b) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 4b = 4a + 4b + 1.$$

Корни уравнения $x_{1,2} = a + \frac{1\pm\sqrt{D}}{2}$. Условие на корни можно записать как систему неравенств $1 - \sqrt{D} < 0;\ 1 + \sqrt{D} \geq 0$. Второе неравенство выполняется автоматически, если корни x_1, x_2 существуют, т.е. $D > 0$. Равенство $D = 0$ исключено, так как уравнение имеет различные корни. Из первого неравенства получаем, что $\sqrt{D} > 1$, то есть система неравенств сводится к одному неравенству

$$D > 1;\ 4a + 4b + 1 > 1; a + b > 0.$$

2 способ. Введем функцию $f(x) = (x-a)^2 - x - b$. Ее график пересекает ось *Ox* в двух точках, x_1 и x_2, причем $x_1 < a \leq x_2$. Если число a лежит строго между корнями, это равносильно условию $f(a) < 0$, то есть $-a - b < 0$; $a + b > 0$.

Остается рассмотреть случай $a = x_2$, то есть $f(a) = 0$, $b = -a$. В этом случае квадратное уравнение принимает вид $x - a = (x-a)^2$. Его решения – это $x_1 = a$, $x_2 = a + 1$. Мы видим, что a является меньшим корнем, а не большим, что не удовлетворяет условию.

Аналогичное рассуждение можно получить, преобразуя неравенство $(x_1 - a)(x_2 - a) < 0$ с использованием теоремы Виета. Оба варианта второго способа были предложены участниками олимпиады, однако никто из них не рассмотрел особый случай.

Замечание. Условие того, что корень x лишний, можно переписать в виде $-b < x < a$, откуда сразу следует, что $-b < a$, то есть $a + b > 0$. Однако это только необходимое условие. Нужно ещё показать, что оно достаточное. То есть, что корня два и второй не является лишним.

Некоторые участники неправильно восприняли термин «лишний корень». Они считали, что «лишний корень» – это корень, который уже есть и повторился второй раз. На самом деле такой корень называется кратным, и он соответствует случаю, когда дискриминант равен 0. Чтобы исключить этот случай, в условии специально указано, что квадратное уравнение имеет два *различных* корня.

Критерии. Использован в той или иной форме 2 способ без исследования особого случая – 15 баллов. Ошибки в преобразованиях – минус 5 баллов. Баллы за частичное продвижение: указание на то, что лишний корень удовлетворяет неравенству $x < a$, дается 5 баллов.

Задача 3 (20 баллов). Вовочка записал число и нашел сумму его цифр. Любочка умножила число на 2 и тоже посчитала сумму цифр. Может ли сумма, полученная Любой, отличаться в три раза от суммы Вовы?

Ответ: да, при умножении на 2 сумма цифр может *уменьшиться* в 3 раза.

Решение. Обозначим сумму цифр числа x через $S(x)$. Пусть Вовочкино число есть x. Что произойдет с суммой его цифр при умножении его на 2? Рассмотрим на примере:

$$\begin{array}{cccc}
3 & 6 & 4 & 7 \\
 & & & 2 \\
\hline
 & & 1 & 4 \\
 & & 8 & \\
1 & 2 & & \\
6 & & & \\
\hline
7 & 2 & 9 & 4
\end{array}$$

Посмотрим на окончательное суммирование. Может ли единица, перешедшая в старший разряд, вызвать ещё один перенос? Нет, так как она складывается с четной цифрой, т.е. с меньшей 9.

Значит, сумму цифр результата можно посчитать как сумму цифр промежуточного вычисления, причем и «по вертикали» и «по горизонтали»,

$$7 + 2 + 9 + 4 = (1 + 6) + 2 + (1 + 8) + 4 = 6 + (1 + 2) + 8 + (1 + 4)$$

Итак, $S(2x)$ равно сумме значений $S(2a)$ по всем цифрам a исходного числа. Заметим, что для «малых» цифр, т.е. $a \le 4$, будет $S(2a) = 2a$, а для «больших» цифр, $a \ge 5$, имеем $2a = 10 + (2a - 10)$ и, следовательно, $S(2a) = 1 + (2a - 10) = 2a - 9$. Складывая все такие значения, получаем, что $S(2x) = 2S(x) - 9m$, где m – количество «больших цифр» исходного числа, как бы они ни были расставлены.

Из этого сразу следует, что $S(2x) \le 2S(x) < 3S(x)$, то есть при умножении числа на 2 сумма цифр не может *увеличиться* в три раза.

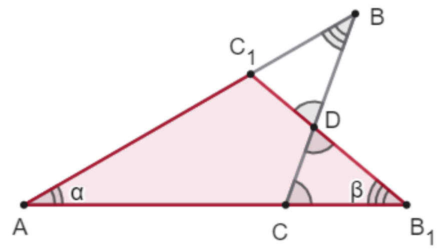
Может ли она *уменьшиться* в три раза? Имеем $S(x) = 3S(2x) = 6S(x) - 27m$, то есть $5S(x) = 27m$. Числа 5 и 27 взаимно простые, поэтому $S(x)$ делится на 27, то есть $S(x) = 27k$, причем среди его цифр $m = 5k$ являются «большими». Наименьшее Вовочкино число получим при $k = 1$, соответствующее x имеет не менее 5 цифр, сумма которых равна 27. Это, например, число 55557. Если не искать минимальное число, можно взять, например, x=66555, $S(66555) = 27$, $S(133110) = 9$ и многие другие.

Замечание. То, что во втором случае $S(x)$ делится на 27, можно обнаружить и не выводя формулу для $S(2x)$. В силу того, что $S(x) = 3S(2x)$, число $S(x)$ делится на 3, но тогда и x делится на 3. Тогда $2x$ также делится на 3, как и $S(2x)$. Значит, $S(x)$ делится на 9, x делится на 9, $2x$ делится на 9, $S(2x)$ делится на 9 и $S(x)$ делится на 27. Некоторые участники продолжали это рассуждение и приходили к выводу, что x должно делиться на произвольную степень тройки, чего, конечно, не может быть (такого числа x не существует). Однако из того, что $S(x)$ делится на 27, не следует, что и x делится на 27, здесь цепочка следствий обрывается.

Критерии. Правильный пример является полным решением задачи и оценивается в 20 баллов. Баллы за частичное продвижение: за корректное доказательство того, что сумма может увеличиться не более, чем в 2 раза – 5 баллов, за формулу $S(2x) = 2S(x) - 9m$ – ещё 5 баллов.

Задача 4 (20 баллов). Из куска картона, одна сторона которого красная, а другая – белая, вырезан треугольник с углами 30°, 40° и 110°. Разрежьте его на две части так, чтобы ими можно было заполнить отверстие, получив красный треугольник на белом фоне.

Решение. Пусть треугольник ABC на рисунке представляет собой отверстие в картоне, а треугольник AB_1C_1 – перевернутый (красный) кусок картона (до разрезания). Чтобы совместить красный треугольник с белым, не переворачивая, можно попробовать отрезать треугольник CDB_1 и подвинуть его до совмещения с треугольником C_1DB. Для этого угол DCB_1 должен совпадать с углом C_1DB, который, в свою очередь, равен углу CDB_1.



Итак, треугольник CDB_1 равнобедренный, тогда $\angle DCB_1 = \frac{180° - \beta}{2} = \alpha + \beta$ (как внешний угол треугольника ABC). Значит, углы исходного треугольника должны быть связаны соотношением $180° - \beta = 2\alpha + 2\beta$, то есть $2\alpha + 3\beta = 180°$. Это равенство выполняется, если положить $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$. Значит, отрезать надо часть треугольника при вершине с углом в 40°.

Замечание. Некоторые участники поняли задание неправильно. Они решили, что можно перевернуть «красной стороной наружу» только одну из частей, она и будет «красным треугольником на белом фоне». В таком виде задача становится слишком простой, никакие значения углов не важны. Надо просто отрезать от исходного (белого) треугольника любой равнобедренный треугольник и перевернуть его.

Критерии. Правильно разобрана неверно понятая задача (переворачивание только одной части треугольника) – 5 баллов. Приведена идея правильного разрезания с переворотом двух частей, но не обоснована расчетом – 15 баллов. За полное решение задачи 20 баллов.

Задача 5 (20 баллов). Вовочка выписал на доске несколько натуральных чисел (натуральный – значит целый положительный). Он предложил Любочке выбрать любые два натуральных числа m, n, сумма которых $m + n$ выписана (сами m и n не обязаны быть среди написанных), причем утверждал, что и их произведение mn окажется выписанным числом. Какие числа мог выписать Вовочка на доске?

Ответ: любой набор чисел $\{1, 2, \dots, k\}$, где $1 \leq k \leq 4$.

Решение. Предположим, что на доске выписано натуральное число $a > 1$, тогда его можно представить как сумму $m = 1$ и $n = a - 1$. Но тогда на доске должно быть и число $mn = 1(a-1) = a - 1$. Итак, вместе с каждым выписанным числом на доске должны присутствовать и все предыдущие члены натурального ряда. То есть множество выписанных чисел имеет вид $\{1, 2, \dots, k\}$.

Каким может быть наибольшее число k? Если в множестве есть число $5 = 2 + 3$, то должно быть и число $6 = 2 \cdot 3$, а также из $6 = 2 + 4$ следует, что в множестве есть $8 = 2 \cdot 4$ (и $7 = 8 - 1$) и т.д. Вообще, если выписано число $p > 4$, то выписано и $2(p-2) = 2p - 4 = p + p - 4 > p$. Противоречие с максимальностью p. Итак, $k \leq 4$. Проверка показывает, что любое такое k подходит.

- Выписана только $\{1\}$, тогда не существует таких m, n что $m + n = 1$. Заметим, что этот случай не противоречит условию задачи, так как не сказано, что Любочка вообще может подобрать нужные числа m и n.
- Выписаны $\{1, 2\}$, единственное разбиение в сумму $m + n = 2$; $m = n = 1$, $1 \cdot 1$ выписано.
- Выписаны $\{1, 2, 3\}$, возможные разбиения в сумму $1 + 1 = 2$ и $1 + 2 = 3$, $1 \cdot 1$ и $1 \cdot 2$ выписаны.
- Выписаны $\{1, 2, 3, 4\}$, возможные разбиения в сумму, кроме предыдущих, $1 + 3 = 4$ и $2 + 2 = 4$, $1 \cdot 3$ и $2 \cdot 2$ выписаны.

Некоторые участники решали задачу в предположении, что числа m и n различны, хотя это нигде не сказано.

Критерии. Полное решение – 20 баллов. Не доказано строго, что максимальное число не может быть больше 4 – минус 5 баллов. Выписаны не все решения – минус 5 баллов. При этом за пропуск только решения $\{1\}$ баллы не снимались.

Частичные продвижения: за доказательство того, что вместе с каждым числом выписано предыдущее, дается 5 баллов.