Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика», заключительный этап
2025/26 учебный год
10 класс

Задача 1 (20 баллов). Какое из чисел $\sqrt[2020]{2025!}$, $\sqrt[2021]{2026!}$ больше? Обозначение $n!$ читается «эн факториал» и равно произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ: Второе.

Решение. Обозначим $\sqrt[2020]{2025!} = a$; $\sqrt[2021]{2026!} = b$. Докажем, что $b < 2026$. Действительно,

$$b^{2021} = 2026! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2026 = 720 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2026,$$

всего 2021 сомножитель, каждый из которых (кроме последнего), меньше 2026.

Значит, $b^{2021} < 2026^{2021}$. Но $2026! = b^{2021} = 2026 \cdot 2025! = 2026 \cdot a^{2020}$. Тогда $\left(\frac{b}{a}\right)^{2020} = \frac{2026}{b} > 1$.

Существует большое количество других правильных способов рассуждения.

Критерии. Задача сведена к сравнению: 2025! с 2026^{2020} дает 10 баллов. Доказано, что $2025! < 2026^{2020}$ также 10 баллов.

Задача 2 (20 баллов). Решить неравенство $\sin(\cos(x)) \geq \cos(\sin(x))$.

Ответ: У неравенства нет решений.

Решение. 1 способ. В силу четности левой и правой частей достаточно рассмотреть неотрицательные x на полупериоде $[0;\pi]$. Более того, можно ограничиться промежутком $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, так как при $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ левая часть отрицательна (неположительна), а правая – положительна.

В промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и синус, и косинус положительны. Известно, что для положительных x верно соотношение $\sin x < x$. Тогда

$$\sin(\cos(x)) < \cos x < \cos(\sin x)$$

Последнее неравенство верно в силу убывания косинуса на промежутке от 0 до $1 < \frac{\pi}{2}$.

2 способ. Можно доказать отсутствие решений и не используя соотношение $\sin x < x$. Исследуем разность $f(x) = \sin(\cos(x)) - \cos(\sin(x))$. Имеем

$$f(x) = \sin(\cos x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = 2\sin\left(\frac{\cos x - \frac{\pi}{2} + \sin x}{2}\right)\cos\left(\frac{\cos x + \frac{\pi}{2} - \sin x}{2}\right)$$

Заметим, что $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, так что эти выражения изменяются в пределах от $-\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}$. Кроме того, $\sqrt{2} \approx 1{,}414 < \frac{\pi}{2}$. В силу этого, аргумент синуса лежит в пределах $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$, причем $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$. Значит, аргумент синуса входит в промежуток $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ в котором синус отрицателен.

Аналогично, аргумент косинуса лежит в пределах $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right] \subset \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, значит, косинус этого угла положителен. Итак, функция $f(x)$ отрицательна при всех x, так что неравенство не имеет решений.

Критерии. Неравенство приведено к виду $\sin\left(\frac{\cos x - \frac{\pi}{2} + \sin x}{2}\right)\cos\left(\frac{\cos x + \frac{\pi}{2} - \sin x}{2}\right) \geq 0$ – 4 балла.

Доказано, что $\frac{\cos x - \frac{\pi}{2} + \sin x}{2}$ лежит в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, поэтому $\sin\left(\frac{\cos x - \frac{\pi}{2} + \sin x}{2}\right) < 0$ – 8 баллов.

Доказано, что $\frac{\cos x + \frac{\pi}{2} - \sin x}{2}$ лежит в интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому $\cos\left(\frac{\cos x + \frac{\pi}{2} - \sin x}{2}\right) > 0$ – 8 баллов.

Задача 3 (20 баллов). Найти все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие соотношению $P(n) = \frac{1}{2}\big(P(n+1) + P(n-1)\big)$ для всех целых n.

Ответ: линейные многочлены $P(x) = ax + b$.

Решение. Пусть $P(x) = ax + b$, тогда $P(n+1) + P(n-1) = an + a + b + an - a + b = 2ax + 2b = 2P(n)$, соотношение выполняется.

Предположим теперь, что степень многочлена $m \geq 2$. Введем обозначение $Q(x) = P(x+1) - P(x)$, Покажем, что степень многочлена Q ровно на единицу меньше, чем у многочлена P. Действительно, если $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots, a_m \neq 0$, то

$$P(x+1) = a_m(x+1)^m + a_{m-1}(x+1)^{m-1} + \cdots = a_m x^m + m a_m x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots,$$

причем в многоточиях собраны степени, меньшие, чем $m - 1$. Разница значений P составляет $Q(x) = m a_m x^{m-1} + \cdots, m a_m \neq 0$.

Перепишем условие задачи в виде

$$2P(n) = P(n+1) + P(n-1);\ P(n) - P(n-1) = P(n+1) - P(n).$$

Тогда для всех целых n имеем $Q(n-1) = Q(n)$.

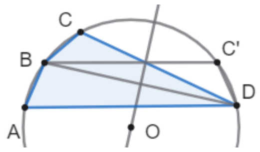
Аналогично, многочлен $R(x) = Q(x) - Q(x-1)$ имеет степень $m - 2$ и удовлетворяет уравнению $R(n) = 0$ для всех целых n. Но это значит, что у многочлена бесконечное число нулей, то есть он тождественно равен 0. Поэтому $Q(x)$ является константой, а исходный многочлен имеет степень не больше 1.

Замечание. Использованное в решении построение называется **методом конечных разностей**: $Q(n)$ – это первые разности, $R(n)$ – вторые и т.д. У многочлена степени m разности порядка $m + 1$ равны 0.

Критерии. Доказательство (проверка) того, что многочлены первой степени удовлетворяют условию задачи – 2 балла. Доказательство (проверка) того, что многочлены второй степени не удовлетворяют условию задачи – 6 баллов. Дополнительно, доказательство этого факта для многочленов третьей степени – еще 4 балла. Альтернативно, доказательство того, что значения многочлена в целых точках образует арифметическую прогрессию – 8 баллов. И 4+6, и 8 баллов суммируется с 2 баллами выше.

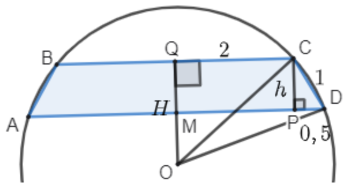
Задача 4 (20 баллов). У Любочки есть четыре отрезка, длиной 1, 1, 4 и 5. Она хочет составить из них вписанный четырехугольник (отрезки будут сторонами этого четырехугольника). Найдите наименьший радиус окружности, в которую можно вписать полученный четырехугольник.

Ответ: $R = \sqrt{7}$.



Решение. Заметим, что можно поменять местами две соседние стороны, например, BC и CD, и четырехугольник останется вписанным в ту же окружность. Для этого достаточно отразить треугольник BCD симметрично относительно перпендикуляра, опущенного из центра O на диагональ BD. Поэтому радиус описанной окружности не зависит от порядка следования сторон.

Нам достаточно найти радиус окружности, описанной около равнобокой трапеции с основаниями 4 и 5 и боковой стороной 1. Из прямоугольных треугольников (см. рисунок) получаем, что



$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}, H^2 + 2^2 = R^2 = (H-h)^2 + 2{,}5^2 = H^2 - \sqrt{3}H + 7$$

Решая эту систему уравнений, получаем, что $R^2 = 7$.

Замечание. В литературе есть формулы для радиуса описанной около четырехугольника окружности. Однако эти сведения не входят в школьную программу, поэтому по правилам их можно использовать, только если участник приведет доказательство этих формул.

Критерии. За верное решение – 20 баллов.

Задача 5 (20 баллов). Среди жителей острова треть составляют рыцари, которые никогда не лгут, а остальные – лжецы, которые лгут в 2/3 случаев. Произвольно выбранный житель ответил правду на один вопрос. Какова вероятность того, что на второй вопрос он солжет?

Ответ: $\frac{4}{15}$

Решение. Пусть событие A = «житель ответил правду». Найдем вероятность этого события. Есть два варианта: это рыцарь (вероятность 1/3), он ответит правду всегда. Вероятность этого варианта равна $\frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$. Второй вариант – он лжец, тогда вероятность правдивого ответа равна $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Значит, вероятность события A равна $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

Солгать может только лжец. Вероятность, что житель, сказавший правду, является лжецом, равна $\frac{2/9}{5/9} = \frac{2}{5}$. Вероятность того, что он солжет, равна $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.

Критерии. Вместо искомой вероятности найдена вероятность, что случайный житель на первый вопрос ответит правду и солжет на второй вопрос (p=4/27) – 0 баллов.

Найдена вероятность, что случайный житель на первый вопрос ответит правду (p=1/3+2/9=5/9) – 5 баллов.

Найдена вероятность того, что случайный человек, ответивший правду, является лжецом (p=2/5) – 10 баллов.

При правильном ходе решения присутствуют арифметические ошибки при работе с дробями – минус 5 баллов.