Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика», заключительный этап
2025/26 учебный год

11 класс

Задача 1 (20 баллов). Вовочке и Любочке выдали одинаковое число листов бумаги для вырезания новогодних фигурок. Вовочка вырезал из каждого листа по 2 снежинки, либо по 3 звездочки. Экономная Любочка вырезала по 3 снежинки либо по 4 звездочки на лист. Истратив все листы полностью, они насчитали 20 снежинок и 26 звездочек. Не ошиблась ли они в подсчетах?

Ответ: Ошиблись.

Решение. Пусть у каждого из ребят было по n листов, из них на снежинки Вовочка потратил k листов, $0 \le k \le n$, а Любочка – m листов, $0 \le m \le n$.

Тогда снежинок всего получилось $2k + 3m = 20$, а звездочек – $3(n-k) + 4(n-m) = 7n - 3k - 4m = 26$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2k + 3m = 20 \\ 3k + 4m = 7n - 26 \end{cases}, \text{откуда } \begin{cases} k = 21n - 158 \\ m = 112 - 14n \end{cases}.$$

Условие $k \ge 0$ дает ограничение $n \ge \frac{158}{21} \approx 7{,}52$. Аналогично из $m \ge 0$ следует, что $n \le \frac{112}{14} = 8$, откуда $n = 8$. Но при этом получаем $k = 10$, чего быть не может, так как $k \le n = 8$. Указанные данные противоречивы.

Замечание. В задаче важны все 4 ограничения на k и m, одной неотрицательности недостаточно.

Критерии. Верное решение – 20 баллов. Допустимы незначительные недочеты, не влияющие на общую правильность хода решения и полученный ответ.

Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях – 10 баллов.

Неверный ответ, или верный ответ, приведенный без обоснования, или основанный на ошибочном решении – 0 баллов.

Задача 2 (20 баллов). Вовочка решает уравнение вида $\sqrt{a-x} = x - b$ с конкретными значениями параметров a и b. Он переписал его в виде $a - x = (x-b)^2$ и решил это квадратное уравнение. При каких значениях a и b ровно один полученный корень является лишним для исходного уравнения?

Ответ: $a \ge b$ или $a - b = -\frac{1}{4}$

Решение. Лишний корень может появиться при возведении уравнения в квадрат, если правая часть исходного равенства имеет отрицательное значение. ОДЗ в данном случае проверять не нужно, так как для каждого корня выполняется $a - x = (x-b)^2 \ge 0$.

Квадратное уравнение можно переписать в виде $x^2 - (2b-1)x + b^2 - a = 0$, его дискриминант равен

$$D = (2b-1)^2 - 4(b^2 - a) = 4b^2 - 4b + 1 - 4b^2 + 4a = 4a - 4b + 1.$$

Корни уравнения имеют вид $x_{1,2} = b - \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$. Чтобы корень был лишним, надо, чтобы выполнялось неравенство $x - b < 0$, т.е. $x < b$. Рассмотрим два случая.

а) Один корень лишний, а второй – нет, должны выполняться соотношения

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2} < 0;\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2} \ge 0 \text{ т. е. } \sqrt{D} > -1 \text{ и } \sqrt{D} \ge 1$$

Решением системы будет $D \ge 1;\ 4a - 4b + 1 \ge 1, a - b \ge 0$.

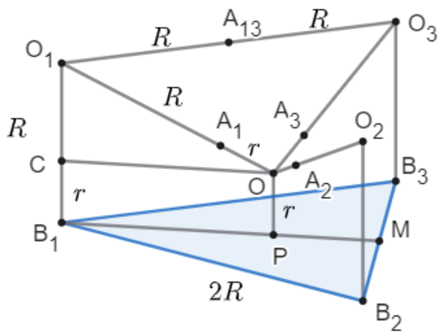
б) Второй корень также лишний, но он совпадает с первым. Значит, $D = 0$, $4a - 4b + 1 = 0$. При этом корень имеет вид $x = b - \frac{1}{2} < b$.

Критерии. За правильный разбор каждого из двух случаев – по 10 баллов.

Задача 3 (20 баллов). На горизонтальную плоскость положены три шара одинакового радиуса R, попарно соприкасающиеся друг с другом. Четвертый шар лежит в полости между тремя шарами и плоскостью. Каков наибольший возможный радиус такого шара?

Ответ: $\frac{R}{3}$.

Решение. Пусть радиус искомого шара равен r. Наибольшим он будет, если малый шар касается всех трёх шаров и плоскости. На чертеже указаны центры (O_i) шаров и некоторые точки их касания между собой и с плоскостью. Индексы соответствуют номерам шаров.



Отрезок B_1M является высотой правильного треугольника со стороной $2R$, поэтому его длина равна $R\sqrt{3}$. Соответственно, $CO = B_1P = \frac{2}{3}B_1M = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Из прямоугольного треугольника O_1OC получаем соотношение

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2;\ 4Rr = \frac{4}{3}R^2; R = 3r$$

Критерии. Если решена задача про окружности на плоскости, а не сферы в пространстве - 5 баллов. Полностью верное и оформленное решение - 20 баллов.

Задача 4 (20 баллов). Среди жителей острова две трети составляют рыцари, которые никогда не лгут, а остальные – лжецы, которые лгут в 75% случаев. Произвольно выбранный житель ответил правду на два вопроса. Какова вероятность того, что на третий вопрос он солжет?

Ответ: $\frac{1}{44}$

Решение. Пусть событие А = «житель два раза сказал правду». Есть два варианта. Первый: это рыцарь (вероятность 2/3), он ответит правду всегда. Вероятность этого варианта равна $\frac{2}{3} \cdot 1^2 = \frac{2}{3}$. Второй вариант – он лжец, тогда вероятность двух правдивых ответов равна $\frac{1}{3} \cdot 0{,}25^2 = \frac{1}{48}$. Значит, вероятность события A равна $\frac{2}{3} + \frac{1}{48} = \frac{33}{48}$.

Солгать может только лжец. Вероятность, что житель, сказавший дважды правду, является лжецом, равна $\frac{1/48}{33/48} = \frac{1}{33}$. Вероятность того, что он солжет, равна $\frac{1}{33} \cdot 0{,}75 = \frac{1}{33} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{44}$.

Критерии. Вместо искомой вероятности найдена вероятность, что случайный житель на два первых вопроса ответит правду и на третий вопрос солжет (p=1/64) – 0 баллов.

Найдена вероятность, что случайный житель на два первых вопроса ответит правду (p=2/3+1/48=11/16) – 5 баллов.

Найдена вероятность того, что случайный человек, дважды ответивший правду, является лжецом (p=1/33) – 10 баллов.

Найдена вероятность не исходного, а противоположного события (на третий вопрос житель скажет правду p=43/44) – 15 баллов.

При правильном ходе решения присутствуют арифметические ошибки при работе с дробями – минус 5 баллов.

Задача верно решена для случая, когда лжец говорит правду не с вероятностью 1/4, а с вероятностью 3/4 (p=9/164) – 10 баллов.

Задача 5 (20 баллов). Многочлен $P(x)$ при некотором натуральном k удовлетворяет тождеству $xP'(x) = k(P(x+1) + P(x-1))$. а) Докажите, что $P(x)$ – четная функция.

б) Чему равно значение $P(1)$?

Ответ: $P(1) = 0$.

Решение. а) Пусть многочлен P имеет степень n, то есть его старший член имеет вид $ax^n, a \neq 0$. Приравняем старшие члены левой и правой частей тождества, получим равенство $nax^n = 2kax^n$, откуда $n = 2k$.

1 способ. Рассмотрим многочлен $P_1(x) = P(-x)$. Ясно, что $P(x) = P_1(-x)$. Подставим это выражение в условие задачи. Получим

$$x\big(P_1(-x)\big)' = k(P_1(-x-1) + P_1(-x+1))$$

Заметим, что $\big(P_1(-x)\big)' = P_1'(-x) \cdot (-1)$ по формуле производной сложной функции. Значит,

$$-xP_1'(-x) = k\big(P_1(-x-1) + P_1(-x+1)\big) \text{ или } tP_1'(t) = k(P_1(t-1) + P_1(t+1))$$

где $t = -x$.

Итак, многочлен $P_1(x)$ также удовлетворяет заданному соотношению. Легко проверить, что тогда и разность $Q(x) = P(x) - P_1(x) = P(x) - P(-x)$ удовлетворяет ему же. Но Q – нечетная функция, в частности, имеет нечетную степень. Это противоречит доказанному выше. Значит, $Q(x)$ тождественно равно 0 и $P(x) = P(-x)$ при всех x. Это и означает, что P – четная функция.

Можно оформить это рассуждение немного по-другому:

2 способ. Запишем $P(x)$ в виде суммы четной и нечетной частей: $P(x) = Q(x) + R(x)$, где в Q входят слагаемые с четными степенями x, а в R – с нечетными. Имеем $P'(x) = Q'(x) + R'(x)$, причем $Q'(x)$ – нечетная функция, а $R'(x)$ – четная. Условие на P принимает вид

$$xQ'(x) + xR'(x) = Q(x+1) + R(x+1) + Q(x-1) + R(x-1).$$

Подставим в это равенство вместо x значение $(-x)$,

$$(-x)Q'(-x) - xR'(-x) = Q(-x+1) + R(-x+1) + Q(-x-1) + R(-x-1)$$

С учетом четности слагаемых получим

$$xQ'(x) - xR'(x) = Q(x-1) - R(x-1) + Q(x+1) - R(x+1).$$

Вычитая это равенство из первого (и разделив обе части на 2), получим

$$xR'(x) = R(x+1) + R(x-1).$$

Итак, нечетная часть P удовлетворяет тому же тождеству. Но мы показали, что степень многочлена, удовлетворяющего заданному условию – четная, значит, нечетный многочлен R равен тождественно 0, а $P(x) = Q(x)$, четная функция.

б) Подставим в исходное тождество вместо x число 0, оно примет вид $0 = P(1) + P(-1) = 2P(1)$, откуда $P(1) = 0$.

Критерии. а) Доказательство того, что многочлен P(x) имеет чётную степень – 5 баллов. Полностью верное и оформленное решение – 15 баллов.

б) Нахождение значения P(1) – 5 баллов