Решения задач олимпиады им. Фридлендера, 7 апреля 2018

Задача 1. Опытный дрессировщик может вымыть слона за 40 минут, а начинающий – за 2 часа. За сколько времени они вдвоем вымоют трех слонов?

Ответ. 1,5 часа.

Решение. За 2 часа опытный дрессировщик мог бы вымыть трёх слонов, а вместе с неопытным – четырёх. Значит, на каждого слона при совместной работе уйдёт полчаса

Задача 2. Отец привел сына в тир и купил ему 20 пулек. За каждый промах отец отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную. Сын выстрелил 18 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

Ответ. 8.

Решение. После попадания число пулек не меняется, после промаха – уменьшается на две. Значит, сын промахнулся 10 раз, а попал, соответственно, 8.

Задача 3. Найти сумму всех шестизначных чисел, в десятичной записи которых присутствуют только цифры 3 или 7.

Ответ. 35555520.

Решение. Всего таких чисел $2^6 = 64$. В каждом из шести разрядов будут встречаться 32 тройки и 32 семёрки. Поэтому при сложении имеем

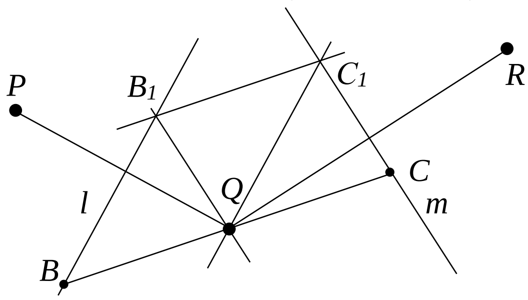
$32 \times (3 + 7) \times (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000) = 35555520$.

Задача 4. Пусть D – дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами. Доказать, что D не может быть равен ни 2018, ни 2019.

Решение. Имеем $D = b^2 – 4ac$, так что $b^2 = 4ac + D$. Значит, у b^2 такой же остаток при делении на 4, как и у D. Но известно, что квадрат целого числа может давать при делении на 4 только остатки 0 и 1, в то время как $2018 = 4k + 2$; $2019 = 4k + 3$.

Задача 5. В выпуклом четырёхугольнике три стороны равны друг другу $AB = BC = CD$. На доске отметили середины этих сторон P, Q и R, остальное изображение стёрли. Восстановить исходный четырёхугольник с помощью циркуля и линейки.

Решение. В первую очередь надо построить вершины B и C так, чтобы расстояния PB, BQ, QC, CR были равными между собой. Значит, вершины B и C лежат на серединных перпендикулярах l и m к отрезкам PQ и QR соответственно. Кроме того, отрезок BC делится точкой Q пополам.



Такой отрезок можно построить многими разными способами. Например, проведем через Q прямые, параллельные l и m. Отрезок B_1C_1 (см. рисунок) параллелен искомому отрезку BC. Построение точек A и D очевидно.

Задача 6. Доказать, что на плоскости не существует равнобедренного треугольника с углом при вершине 45^0, вершины которого находятся в точках с целыми координатами.

Решение. Предположим противное: пусть такой треугольник существует. Изобразим его на плоскости и опишем около него прямоугольник с целыми вершинами. Площадь треугольника можно получить, вычитая из площади прямоугольника площади трех прямоугольных треугольников, т.е. это будет рациональное число. С другой стороны, она равна $1/2\,(AB)^2 \sin 45°$ – иррациональному числу.

Задача 7. Даны три числа x, y и z, удовлетворяющие неравенствам $0 < x < y < z < x+y$.

а) Гарантируют ли эти неравенства существование треугольника с высотами, равными x, y и z ?

б) Гарантируют ли эти неравенства существование треугольника с медианами, равными x, y и z ?

Ответ. а) нет; б) да.

Решение. а) Если такой треугольник со сторонами a, b и c существует, то $a = 2S/x$, $b = 2S/y$ и $c = 2S/z$. Для сторон треугольника должно выполняться неравенство $a < b + c$, то есть $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Но оно не выполняется, например, для чисел $x = 2$, $y = 5$, $z = 6$.

б) Строим треугольник ABC со сторонами x, y и z. Проводим в нем медианы AM, BN и CL. Тогда треугольник со сторонами $4AM/3$, $4BN/3$ и $4CL/3$ является искомым.

Задача 8. Имеются в неограниченном количестве прямоугольные детали 1×2, 1×3, 1×4, и т.д., Пусть $T(n)$ – число способов покрыть этими деталями (без пустых мест и наложений друг на друга) полоску размера $1 \times n$, где n – натуральное число. Заполнения, отличающиеся размерами укладываемых деталей или порядком укладки деталей на листе, считаются разными. Доказать, что $T(n) + T(n + 1) = T(n + 2)$.

Решение. Всевозможные заполнения прямоугольника 1 на $n + 2$ разобьём на две категории

1) те, у которых самая последняя (правая) деталь при заполнении есть прямоугольник есть 1 на 2. Убрав правую деталь, получим допустимое покрытие полоски длиной n. Число таких покрытий равно $T(n)$.

2) те, у которых самая последняя (правая) деталь при заполнении есть прямоугольник большего размера. Укоротим его на одну клетку, получим допустимое покрытие полоски длиной $n + 1$. Число таких покрытий равно $T(n + 1)$.

Задача 9. Произведение всех делителей числа N кончается на 2018 нулей. На сколько нулей может заканчиваться само число?

Ответ. На один нуль.

Решение. Пусть в разложении N присутствуют ровно k двоек и n пятерок, то есть $N = 2^k \cdot 5^n \cdot M$. Без ограничения общности можно считать, что $k \le n$, тогда число N кончается на k нулей.

Будем считать, что M имеет m делителей, $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Тогда делителями N будут числа

$2^0 5^0 p_1, 2^0 5^0 p_2, \ldots, 2^0 5^0 p_m$	$2^0 5^1 p_1, 2^0 5^1 p_2, \ldots, 2^0 5^1 p_m$	…	$2^0 5^n p_1, 2^0 5^n p_2, \ldots, 2^0 5^n p_m$
$2^1 5^0 p_1, 2^1 5^0 p_2, \ldots, 2^1 5^0 p_m$	$2^1 5^1 p_1, 2^1 5^1 p_2, \ldots, 2^1 5^1 p_m$	…	$2^1 5^n p_1, 2^1 5^n p_2, \ldots, 2^1 5^n p_m$
$2^2 5^0 p_1, 2^2 5^0 p_2, \ldots, 2^2 5^0 p_m$	$2^2 5^1 p_1, 2^2 5^1 p_2, \ldots, 2^2 5^1 p_m$	…	$2^2 5^n p_1, 2^2 5^n p_2, \ldots, 2^2 5^n p_m$
…	…	…	…
$2^k 5^0 p_1, 2^k 5^0 p_2, \ldots, 2^k 5^0 p_m$	$2^k 5^1 p_1, 2^k 5^1 p_2, \ldots, 2^k 5^1 p_m$	…	$2^k 5^n p_1, 2^k 5^n p_2, \ldots, 2^k 5^n p_m$

Перемножая числа по столбцам мы увидим, что двойка входит в произведение делителей $m(0 + 1 + \cdots + k)(n + 1) = \frac{mk(k+1)(n+1)}{2}$ раз, аналогично пятерка входит $\frac{m\,n(n+1)(k+1)}{2}$ раз, в силу $k \le n$ второе число больше. Итак, $2018 = \frac{mk(n+1)(k+1)}{2}$, то есть $m(n + 1)k(k + 1) = 4036 = 2 \cdot 2 \cdot 1009$, число 1009 простое.

Заметим, что в число 4036 должны в качестве сомножителей входит два последовательных числа k и $k + 1$. Значит, k может принимать только значение 1. Тогда $m(n + 1) = 2018$, можно взять, например, $m = 2$, $n = 1008$. В качестве M подойдет любое простое число (кроме 2 и 5), например, $M = 3$.

Задача 10. В окружность радиуса 1 вписывается квадрат, в квадрат вписывается окружность, в эту окружность – 8-угольник; в него – снова окружность, в окружность – 16-угольник и т.д. Каждый раз в k-ю окружность вписывается 2^{k+1}-угольник, а в него – $(k + 1)$-я окружность. Пусть R_k – радиус k-ой окружности. Найти $\lim\limits_{n\to+\infty} R_k$.

Ответ $\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$

Решение: Несложно получить, что $R_{k+1} = R_k \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$ и, следовательно,

$$R_k = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cdots \cdot \cos\frac{\pi}{2^k}$$

Для вычисления этого произведения умножим обе его части на $\sin\frac{\pi}{2^k}$ и несколько раз применим формулу синуса двойного угла. Получим, что $R_k \sin\frac{\pi}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \sin\frac{\pi}{2}$. Для вычисления предела используется второй замечательный предел.