Решение задач олимпиады им. В.Р.Фридлендера, 6.04.2019

1. Пусть a, b, c, d положительные числа, причем $ab = cd$. Доказать, что $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\geq 2$.

Решение. Пусть $\frac{a}{c}=x$. Тогда $\frac{b}{d}=\frac{1}{x}$. Из $x-2+\frac{1}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geq 0$ следует $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

---

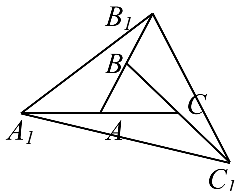
2. Большое количество людей совместно пыталось помножить на 9 четырёхзначное число “тысяча с чем-то”. При умножении столбиком материализовалась поговорка “шесть на ум пошло, семь с ума сошло” - как только шесть “шло на ум”, так сходило с ума семь человек. Какое максимальное число людей могло сойти с ума в результате выполнения этой операции?

Ответ: 21.

Решение: при умножении четырёхзначного числа что-то “шло на ум” не более четырёх раз. Однако, поскольку первая цифра четырёхзначного числа единица, то последний раз “на ум” могла идти только единица. Таким образом, шесть “шло на ум” не более трёх раз. Такое возможно, например, если на 9 умножалось 1667.

---

3. В произвольном треугольнике ABC на продолжении стороны AB за точку B откладывается отрезок $BB_1 = AB$, на продолжении BC откладывается $CC_1 = BC$ и на продолжении CA – отрезок $AA_1 = CA$. Найти площадь треугольника с вершинами A_1, B_1, C_1, если площадь исходного треугольника равна S.



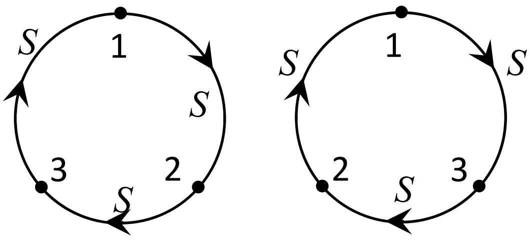
Ответ. $7S$.

Решение. Соединим A_1 и B. В треугольнике A_1BC медиана BA делит треугольник на две равновеликие части, поэтому площадь A_1BA равна площади ABC и составляет S. В треугольнике AA_1B_1 медиана A_1B делит треугольник на две равновеликие части, поэтому площадь A_1B_1B равна площадь A_1BA и тоже составляет S. То есть площадь "добавочного" треугольника AA_1B_1 составляет $2S$. Для двух остальных треугольников BB_1C_1, CC_1A_1 рассуждение аналогичное.

---

4. На замкнутом в кольцо велотреке на равном расстоянии друг от друга находятся три велосипедиста. Они стартуют одновременно и в одном направлении. Первый велосипедист догоняет второго через 12 минут, а третьего – через 18. Может ли оказаться, что третий велосипедист едет быстрее второго? Если да, через сколько минут от начала движения произойдет первый обгон?

Ответ. Да. Через 9 минут.



Решение. Обозначим скорости велосипедистов через v_i, условие обгона имеет вид $v_i{\cdot}t = v_j{\cdot}t + S_{ij}$, где S_{ij} – расстояние, на которое i-ый велосипедист на старте отстает от j-го. Пусть расстояния на старте равны S. Для решения важно, в каком порядке пронумерованы велосипедисты на старте: по ходу движения или против. В первом случае соотношения имеют вид $(v_1 - v_2){\cdot}12 = S$; $(v_1 - v_3){\cdot}18 = 2S$; $(v_3 - v_2){\cdot}t = 2S$. Из первых двух находим $v_2 = v_1 - S/12$; $v_3 = v_1 - S/9$, откуда следует, что $v_3 < v_2$. Этот вариант нам не подходит. Проверим второй случай. Соотношения в этом случае имеют вид

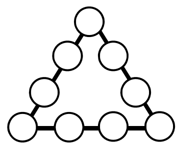
$$(v_1 - v_2){\cdot}12 = 2S;\ (v_1 - v_3){\cdot}18 = S;\ (v_3 - v_2){\cdot}t = S.$$

$$v_2 = v_1 - S/6;\ v_3 = v_1 - S/18,\ v_3 - v_2 = S/9,$$

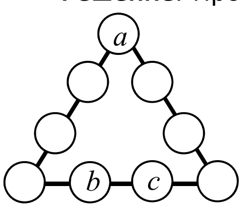
то есть $t = 9$. Это число меньше как 12, так и 18.

---

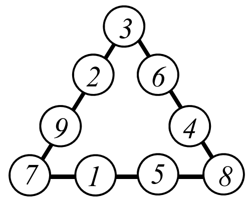
5. В кружки (см. рис.) расставлены по одному натуральные числа от 1 до 9 так, что сумма чисел на каждой стороне треугольника равна 21. Докажите, что число 3 стоит в вершине треугольника.



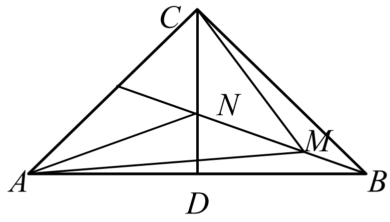
Решение. Просуммируем значения по трем сторонам, $3{\cdot}21 = 63$. Сумма всех чисел в кружках составляет 45, разница образовалась из-за того, то значения в вершинах посчитаны дважды. Значит, сумма чисел в вершинах составляет $63 - 45 = 18$.



Предположим, что тройка стоит не в вершине, например, $b = 3$. Обозначим значение в противолежащей вершине через a. Тогда в вершинах нижней стороны сумма равна $18 - a$, следовательно, $3 + c = 21 - (18 - a) = 3 + a$, то есть $a = c$ – противоречие. Решение задачи с тройкой в углу существует:



6. Треугольник ABC – равнобедренный ($AC = CB$) углы при основании равны 50°. Внутри треугольника ABC взята точка M так, что угол MAB равен 10°, а угол MBA равен 30°. Найти угол MCB.



Ответ. $\angle MCB = 10°$.

Решение. Пусть точка N – пересечение BM с высотой CD треугольника ABC. Сначала заметим, что $\angle CAN = \angle MAN = 20°$. и $\angle ACN = \angle AMN = 40°$. Следовательно, треугольники ACN и AMN равны. Значит, CMN – равнобедренный и $\angle CNM = 120°$ и потому $\angle NCM = \angle NMC = 30°$ и $\angle MCB = 10°$.

7. Решить уравнение $x^4 - 15x^2 + 6x + 8 = |3x - 1| - |x^2 - 3|$.

Ответ. $x \in \{-4;\ 1;\ \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\}$

Решение. Введем обозначения $u = |3x - 1|$, $v = |x^2 - 3|$. Имеем $v^2 = x^4 - 6x^2 + 9$, $u^2 = 9x^2 - 6x + 1$, так что уравнение принимает вид $v^2 - u^2 = u - v$, откуда $(v - u)(v + u + 1) = 0$. Заметим, что второй сомножитель положителен, так что уравнение сводится к виду $u = v$, то есть $|3x - 1| = |x^2 - 3|$. Если модули двух числе равны, то сами числа отличаются разве что знаками, обратное тоже верно.

1. $x^2 - 3 = 3x - 1$, $x^2 - 3x - 2 = 0$. Корни $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$.
2. $x^2 - 3 = -3x + 1$, $x^2 + 3x - 4 = 0$. Корни 1 и –4.

8. Доказать, что число $\frac{4^{2n-1}+1}{5}$ а) целое для $n > 0$, б) составное для $n > 2$.

Решение. а) Остаток от деления на 5 числа 16 равен единице. Поэтому у произведения $4\cdot 16^m$ при любом неотрицательном m остаток от деления на 5 будет 4. Прибавив к этому числу единицу, получим число, делящееся на 5.

б) $$4^{2n-1} + 1 = 4^{2n-1} + 2\cdot 2^{2n-1} + 1 - 2^{2n} =$$
$$(2^{2n-1} + 1)^2 - 2^{2n} = (2^{2n-1} + 1 - 2^n)(2^{2n-1} + 1 + 2^n).$$

Первый (и второй) множитель больше 5 при $n > 2$.

9. Вокруг круглого стола расставлены n стульев, k человек ($n > k$) по очереди рассаживаются на них. Первый человек садится куда угодно, а каждый последующий выбирает наибольший промежуток из незанятых стульев и садится посередине его (если промежуток состоит из четного числа стульев, то выбирается любое из двух центральных мест). При каких k и n все люди окажутся на равном расстоянии от своих соседей?

Ответ: $k = 2^i$ и $n = m\cdot k$ ($i \ge 0$, $m \ge 2$ – целые числа).

Решение. Заполнение промежутков происходит методом “деления пополам”, поэтому для того, чтобы в конце все сидели на равном расстоянии друг от друга необходимо, чтобы k было степенью двойки. Когда все рассядутся, между соседями будет по $l > 0$ стульев (неравенство строгое, так как стульев больше, чем людей). Значит, общее их количество равно $k\cdot(l + 1)$, то есть n кратно k.

10. Необычный шахматный конь ходит буквой “Г” на n клеток в одну сторону и на $n + 1$ клетку в перпендикулярном направлении (ход обычного коня получается при $n = 1$). За какое наименьшее число ходов необычный конь попадёт на соседнюю клетку (т.е. клетку, имеющую общую сторону с исходной), находясь на бесконечной доске?

Ответ: За $2n + 1$ ход.

Решение. Оценка. Заметим, что после каждого хода конь меняет цвет клетки. Так как соседняя клетка будет противоположного цвета, коню придется сделать нечетное число ходов, обозначим это число за $2k + 1$. Для определённости в качестве соседней возьмём клетку, расположенную выше исходной. При каждом ходе конь будет сдвигаться вправо или влево на n или $n + 1$ клетку. Предположим, что вправо он сделал больше ходов ($k + 1$ или больше). Пусть L_1 – сумма ходов вправо, очевидно, что $L_1 > n(k + 1)$. Пусть L_2 – сумма ходов влево, $L_2 \le (n + 1)k$. После всех ходов он должен остаться на той же вертикали, поэтому $L_1 = L_2$. Получим $n(k + 1) \le (n + 1)k$, откуда $k \ge n$.

Пример. Пример с $k = n$: сдвигаемся за первые два хода на 1 клетку по диагонали вправо и вниз. Повторив эту пару ходов n раз, окажемся на расстоянии n клеток по диагонали от исходной. Последним, $(2n + 1)$-м ходом, становимся на соседнюю к исходной клетку.