Решения задач математической олимпиады им. Фридлендера (01.11.20)

Задача 1. Петя складывал два натуральных числа и нечаянно приписал в конце одного из них какую-то цифру. Поэтому вместо правильного ответа 13579 он получил число 24689. Какие числа должен был сложить Петя?

Ответ. 12345 и 1234.

Решение. Обозначим искомые числа через a и b. Тогда правильный ответ $a + b = 13579$, а Петя получил $a + 10b + c = 24689$, где через c обозначена приписанная цифра. Вычтем первое равенство из второго, получим $9b + c = 11110$. Ясно, что c – остаток от деления числа 11110 на 9, $c = 4$. Теперь можно найти b и a.

Задача 2. Существует ли такая функция $f(x)$, заданная на всей числовой прямой, что для всех $x \neq 0$ выполняется равенство $f(x) + f(1/x) = x^2$?

Ответ. Не существует.

Решение. Подставим в равенство $x = 2$ и $x = 1/2$. Получим, что $f(2) + f(1/2) = 4$ и $f(2) + f(1/2) = 1/4$. Противоречие.

Задача 3. Внутри остроугольного треугольника найти точку, сумма расстояний от которой до всех его вершин и всех сторон наименьшая.

Ответ. Ортоцентр (точка пересечения высот)

Решение. Пусть искомая точка есть O, рассмотрим сумму расстояний от нее до вершины A и противоположной стороны BC. Ясно, что эта сумма будет наименьшей, если O лежит на высоте треугольника. То же верно для двух других пар расстояний. Значит точка O лежит на всех высотах треугольника.

Задача 4. Среднее арифметическое 101 различного натурального числа равно 70. Каким может быть наибольшее значение наибольшего из этих чисел? Наименьшее значение наибольшего из них?

Ответ. 2020; 120.

Решение. Сумма указанных чисел равна $101 \cdot 70 = 7070$. Наибольшее значение слагаемого получим, если все остальные – наименьшие из возможных, то есть 1, 2, …, 100. Их сумма равна 5050, значит, наибольшее слагаемое равно $7070 - 5050 = 2020$.

Наименьшее значение большего слагаемого получим, если остальные сделаем как можно больше. То есть заданные числа имеют вид n, $n - 1$, $n - 2$, … , $n - 100$.

Их среднее арифметическое равно $\frac{101(2n-100)}{2 \cdot 101} = n - 50 = 70$, откуда $n = 120$.

Задача 5. В городе 2020 домов, в каждом по 2019 комнат, в каждой 2018 кошек, каждая из которых держит по 2017 мышек. Можно ли рассадить всех этих мышек по одной на все клетки квадратного игрового поля, если к ним добавить ещё одну?

Ответ. Да, можно.

Решение. Введем обозначение $n = 2019$, тогда число мышек равно

$$(n + 1)n(n - 1)(n - 2) + 1 = (n + 1)(n - 2) \cdot n(n - 1) + 1 = (n^2 - n - 2)(n^2 - n) + 1.$$

В этом выражении положим $(n^2 - n) = m$, тогда оно примет вид $m(m - 2) + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2$.

Задача 6. При каких значениях p все корни уравнения $x^2 - 2(p - 1)x + 3p - 5 = 0$ положительны?

Ответ. $(\frac{5}{3}; 2] \cup [3; +\infty]$.

Решение. Оба корня квадратного трехчлена положительны, когда его вершина находится в четвертой четверти и значение в нуле положительно. Вершина параболы имеет координаты

$$(p - 1, -p^2 + 5p - 6)$$

Значит, искомые значения параметра являются решением системы неравенств

$$p - 1 > 0;\ (p - 2)(p - 3) \geq 0;\ 3p - 5 > 0$$

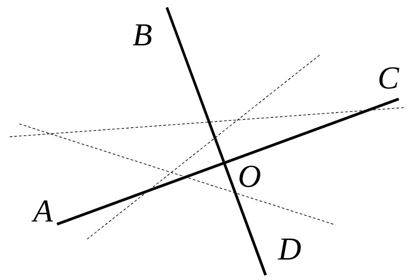
У задачи есть и другие способы решения.

Задача 7. Дан многочлен $P(x) = x^{2020} - 12x^{1002} + 7x^{201} + 10x^{14} + 9x^3 - 12x + 4$. Найти остаток от деления его на $x^3 - x$.

Ответ. $-x^2 + 4x + 4$.

Решение. Запишем заданный многочлен в виде $P(x) = Q(x)\cdot(x^3 - x) + ax^2 + bx + c$, тогда $ax^2 + bx + c$ и будет остатком. Это равенство верно при любом x, например, при 0, –1, 1. Подставляя эти значения, получаем систему уравнений $c = 4$, $a + b = 3$, $a - b = -5$, из которой и находим коэффициенты.

Задача 8. На рисунке показаны оси декартовой системы координат (жирные линии) и графики прямых $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$. Укажите положительное направление оси Ox.



Ответ. OA.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения заданных прямых, они равны $x_1 = \frac{c-b}{a-b}$, $x_2 = \frac{a-c}{b-c}$, $x_3 = \frac{b-a}{c-a}$.

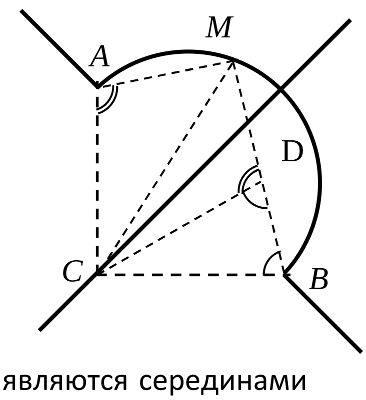
Условие вида $\frac{c-b}{a-b} < 0$ означает, что b лежит между a и c, поэтому из трех чисел x_1, x_2, x_3 ровно одно отрицательно, а два – положительны. Значит точки пересечения должны лежать по разные стороны от оси Oy, причем две – с положительной стороны.

Заметим, что все точки пересечения прямых лежат с одной стороны от оси AC. Значит, осью Ox может быть только AC. Причем положительным будет направление OA, так как слева от BD лежат две точки пересечения прямых.

Задача 9. Отрезки AC и BC равны и перпендикулярны. Найдите множество всех точек M таких, что $\angle AMC = \angle BMC$.

Ответ. На рисунке, сплошной линией.

Решение. Рассмотрим два случая: когда искомые углы откладываются по одну сторону от CM и когда по разные. В первом случае точки A, B и M лежат на одной прямой. Для точек, лежащих на отрезке AB искомые углы являются дополнительными, так что условию удовлетворяет только его середина. Два «внешних луча» входят в ГМТ.



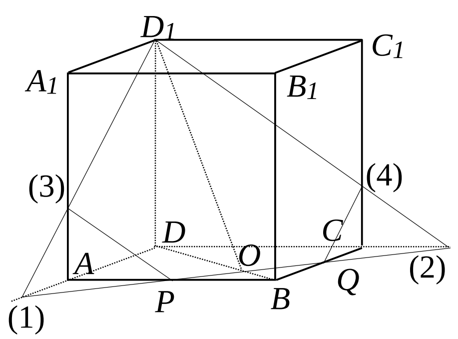
Второй случай: углы откладываются по разные стороны от CM. При этом расстояния AM и BM могут быть равны. Тогда в силу равенства треугольников ACM и BCM точка M лежит на прямой, делящей угол ACB пополам.

Пусть теперь $AM < BM$ (противоположный случай исследуется аналогично). Поставим на отрезке BM точку D так, что $MD = MA$, треугольники CMD и CMA равны. Значит, $\angle CDM = \angle CAM$ и $\angle BDC = \angle DBC$, но тогда сумма углов $\angle CAM$ и $\angle CBM$ равна 180°, а угол AMB составляет 90°. Значит, точка M лежит на окружности с диаметром AB точнее, на той ее полуокружности, которая не содержит C.

Задача 10. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Точки P и Q являются серединами ребер AB, и BC. а) Построить сечение куба плоскостью PQD_1. б) Какова его площадь?

Ответ. а) см. рисунок. б) $\frac{7\sqrt{17}}{24}$

Решение. а) Построить сечение – значит провести на чертеже все отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани куба. Для этого на каждой грани надо знать две точки, принадлежащие секущей плоскости. Например, точки P и Q лежат в нижней грани, поэтому отрезок PQ и будет следом секущей плоскости на этой грани. Остальные недостающие точки строятся последовательно, как это указано на чертеже. Например, точка (1) получается как пересечение прямых PQ и AD и лежит в левой боковой грани. Точка (3) возникает как пересечение (1)D_1 и AA_1 и т.д.



б) Искомое сечение можно представить как разность треугольника (1)D_1(2) и двух равных треугольников (1)(3)P и Q(4)(2), каждый из которых подобен ему с коэффициентом 1/3.

Имеем $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (1)(2) = $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, высота D_1O находится из треугольника DD_1O по теореме Пифагора и равна $\sqrt{1+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}$. Площадь треугольника (1)D_1(2) равна $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{34}}{4} = \frac{3\sqrt{17}}{8}$. Искомая площадь равна $S - \frac{2}{9}S = \frac{7}{9}\cdot\frac{3\sqrt{17}}{8} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$. Можно также достроить сечение до ромба, продолжив стороны (3)P и (4)Q.