Решения задач олимпиады памяти В.Р.Фридлендера, Казань, 4.04.2021

За каждую задачу можно получить максимум 7 баллов. Если ученик 8-11 класса решает задачу за 6-7 класс, решение оценивается максимум на 5 баллов.

Задача 1. (6-7) Антон, Борис и Виктор – тройняшки. Антон и Борис всегда врут, а Виктор всегда говорит правду. На улице вы повстречались с одним из братьев. Как, с помощью простого вопроса (не более трёх слов), ответом на который могут быть только слова «да»/«нет», выяснить, зовут ли его Антоном?

Ответ. Например, «Тебя зовут Борис?»

Решение. На вопрос «Тебя зовут Борис?» Антон соврёт «Да», Борис соврёт «Нет», Виктор скажет правду «Нет». Так что «Да» может ответить только Антон.

Задача 2. (6-7) Башня состоит из 4 ярусов, каждый из них имеет форму параллелепипеда с квадратным основанием. Нижний ярус по всем направлениям в 4 раза больше верхнего, второй снизу – в 3 раза, третий – в 2. Объем башни 22500 м^3, площадь боковых стен 5400 м^2. Найдите высоту башни.

Ответ. 90 м.

Решение. Пусть у верхнего яруса площадь боковых стен равна S, объем – V. У второго снизу яруса длина и ширина боковых граней в 2 раза больше, поэтому площадь больше в 4 раза, чем у верхнего, а объем – в 8 раз. Аналогичными рассуждениями получаем, что площадь боковых стен равна $S + 4S + 9S + 16S = 5400$, объём всей башни – $V + 8V + 27V + 64V = 22500$, откуда $S = 5400/30 = 180$, $V = 22500/100 = 225$. Одна боковая сторона верхнего яруса имеет площадь $180/4 = 45 = ah$, $a^2h = 225$. Значит, $a = 225/45 = 5$, h = 45/a = 9. Вся высота башни составляет $h + 2h + 3h + 4h = 10h$.

Задача 3. (6-7) Учитель написал на доске пример на умножение. Ученый с мировым именем Иннокентий стёр с доски две цифры и написал на месте каждой из них другую. Получилась запись $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 2021$. Что было написано на доске изначально? Приведите все возможные варианты.

Ответ. $3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 = 2025$.

Решение. Разберём несколько случаев.

а) В левой части нет изменений. Но $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 1575$, так что менять пришлось бы 4 цифры.

б) В правой части нет изменений. Но правая часть не делится ни на 3, ни на 5, ни на 7, так что в левой части пришлось бы поменять все цифры.

Значит, и слева и справа поменяли по одной цифре. Но тогда слева осталась хотя бы одна пятерка, то есть последняя часть произведения 0 или 5. Проверим два эти числа:

$2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, число 101 простое, не подходит

$2025 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, можно получить из исходного заменой цифры 7.

Задача 4. Усердный Петя взял несколько чисел, возвел каждое в квадрат и сложил полученные значения. Усердная Маша прибавила к каждому Петиному числу по 1 и проделала те же действия. Не менее усердный Иннокентий вычел из каждого Петиного числа 1 и проделал то же самое.

(6-7) Как ни странно, Машина сумма оказалась такой же как у Пети, а сумма Иннокентия – даже на 120 больше! Сколько чисел написал Петя?

(8-11) Как ни странно, Машина сумма оказалась на 1000 меньше, чем у Пети, а сумма Иннокентия – на 1000 больше! Все ли трое сделали вычисления правильно?

Ответ. (6-7) 60 чисел; (8-11) Кто-то явно ошибся.

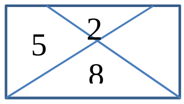
Решение. Маша увеличила квадрат каждого числа x на $(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$, а Иннокентий – на $(x - 1)^2 - x^2 = -2x + 1$. Сумма изменений равна 2. Значит, сумма изменений по всем n числам равна $2n$.

(6-7) $2n = 120$, так что $n = 60$.

Можно показать, что этот случай мог произойти. Сумма Маши отличается от суммы Пети на $2S + n$, где S – сумма всех выписанных чисел. Это число равно 0, так что $S = -30$. Например, в качестве исходных чисел можно взять набор (–1, –1, …, –1, 0, 0, …, 0) из 30 нулей и 30 значений (–1).

(8-11) $2n = 0$, $n = 0$ – противоречие.

Задача 5. (8-11) Из двух соседних углов прямоугольника проведены две прямые, разделившие фигуру на 4 части. Площади трех частей отмечены на рисунке. Найдите площадь оставшейся части.



Ответ. 9.

Решение. Площадь нижнего треугольника в 4 раза больше, чем верхнего. Нижний треугольник подобен верхнему с коэффициентом подобия $\sqrt{4} = 2$. Значит, высота нижнего треугольника составляет 2/3 от высоты прямоугольника, а площадь, соответственно, 1/3 от площади прямоугольника. Поучаем, что площадь всего прямоугольника – 24.

Задача 6. (6-11) Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(\sqrt{3}+\sqrt{5})=0$?

Ответ. Да. Например, $P(x) = x^4 - 16x^2 + 4$.

Решение. Пусть $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, тогда $x^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$. Уединяем радикал, получаем, что $2\sqrt{15} = x^2 - 8$. Возводя равенство в квадрат, получим искомый многочлен: $60 = x^4 - 16x^2 + 64$

Задача 7. (6-11) Алиса долго шла по Зазеркалью. Она выяснила, что половину пути она двигалась со скоростью 4 км/час, а половину времени – со скоростью 5 км/час. Верно ли она подсчитала?

Ответ. Нет.

Решение. Время движения Алисы можно разбить на три части. Часть I – движение со скоростью 4 км/ч, часть II – движение со скоростью 5 км/ч, часть III – весь остальной путь. Части II и III вместе составляют половину пути, так что длина части II не более половины пути, то есть она не длиннее первой части. Аналогично, части I и III заняли у Алисы половину времени, то есть часть I она прошла не более, чем за половину времени.

Итак, часть I Алиса прошла за меньшее (не большее) время, чем часть II, но она длиннее (не короче), чем часть II. Значит, скорость в первой части должна быть не меньше, чем во второй.

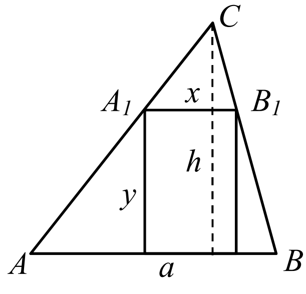
Заметим, что при выполнении этого условия возможно организовать движение указанным образом. Например, Алиса прошла 100 км за 22 часа, причем половину пути (50 км) со скоростью 5 км/ч (за 10 часов), половину времени (11 часов) со скоростью 4 км/ч, всего 44 км. Остается ещё 1 час и 6 км, которые Алиса прошла со средней скоростью 6 км/ч.

Комментарий. В решении не нужно требовать, чтобы движение Алисы происходило только с этими скоростями и в определенной последовательности. Если это утверждается, у учеников 8 – 11 классов снимается 1 балл.

Задача 8. (8-11) Пусть ABC – остроугольный треугольник. Будем называть прямоугольник вписанным в ABC, если две его вершины лежат на основании AB треугольника, а две других – на остальных сторонах. Может ли оказаться, что периметр каждого такого прямоугольника равен 20? Если да, то чему равна площадь треугольника ABC?

Ответ. Высота треугольника равна его основанию, площадь равна 50.

Решение. Треугольники A_1CB_1 и ABC подобны, так что $\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h} = 1 - \frac{y}{h} = k$, откуда периметр прямоугольника равен $P = 2(x+y) = 2(ka + (1-k)h) = 2(h + k(a-h))$. Эта величина не зависит от k при условии $a = h$. Если это соотношение выполняется, то $P = 2h = 20$, $h = a = 10$, откуда и находим площадь треугольника.



Задача 9. (8-11) Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ \dots \\ x_{2018} + x_{2019} + x_{2020} + x_{2021} = 2018 \\ x_{2019} + x_{2020} + x_{2021} + x_1 = 2019 \\ x_{2020} + x_{2021} + x_1 + x_2 = 2020 \\ x_{2021} + x_1 + x_2 + x_3 = 2021 \end{cases}$$

Найдите x_{2021}.

Ответ. x_{2021} = 1 262,75

Решение. Сложим все уравнения системы. Заметим, что каждая переменная входит в четыре уравнения, поэтому слева мы получим учетверенную сумму всех переменных. Справа стоит арифметическая прогрессия, ее сумма равна $\frac{2022 \cdot 2021}{2} = 2\,043\,231$. Значит, сумма всех x_i равна 2 043 231:4 = 510 807,75. Разобьем ее на четверки,

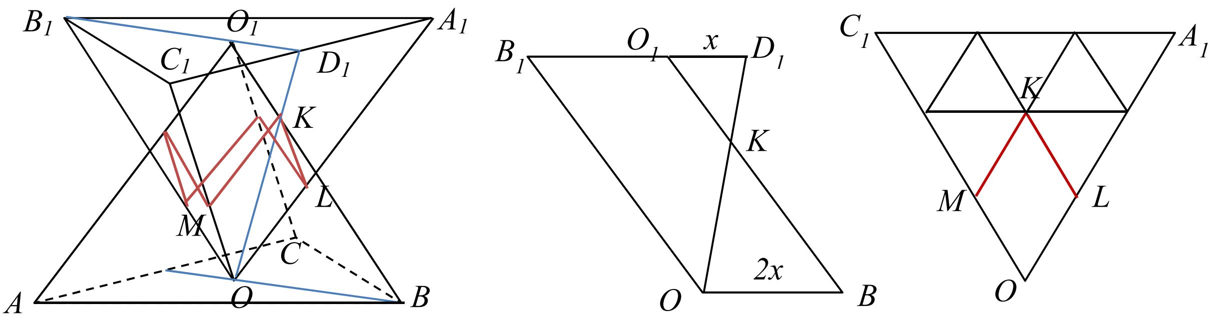
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \dots + (x_{2017} + x_{2018} + x_{2019} + x_{2020}) + x_{2021} =$$
$$= 1 + 5 + \dots + 2017 + x_{2021} = \frac{2018 \cdot 505}{2} + x_{2021} = 509\,545 + x_{2021}$$

Итак, $x_{2021} = 510\,807{,}75 - 509\,545$

Задача 10. (10-11) $ABCO$ и $A_1B_1C_1O_1$ – два правильных тетраэдра с ребром a, расположенных так, что O – центр треугольника $A_1B_1C_1$, а O_1 – центр треугольника ABC. Кроме того, плоскости ABO и $A_1B_1O_1$ параллельны (то есть основание одного тетраэдра повернуто относительно основания другого на 180°). Найти площадь поверхности тела, содержащего общую часть этих тетраэдров.

Ответ. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Решение. В силу симметрии ребро O_1B пересекает грань OA_1C_1 на высоте OD_1. Обозначим точку пересечения K. Ясно, что треугольники O_1KD_1 и BKO подобны с коэффициентом 2 : 1. Значит, K – центр грани OA_1C_1. Аналогично $MC_1 : MO = LA_1 : LO = KD_1 : KO$ = 1 : 2. Грань искомого пересечения тетраэдров это параллелограмм $OMKL$. Легко показать, что его площадь равна 2/9 площади треугольника OA_1C_1.



Итак, площадь поверхности пересечения равна $6 \cdot \frac{2}{9} S_{OA_1C_1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Задача 11. Дана таблица $n \times n$ клеток, заполненная целыми числами от 1 до n. В каждом столбце все числа различны, кроме того, таблица симметрична относительно диагонали. Доказать, что на этой диагонали тоже все числа различны.

(6-7) n = 5;

(8-11) n = 111.

Решение. Доказательство одинаковое для всех нечетных n. Каждое число от 1 до n встречается в таблице n раз. Причем вне диагонали в силу симметрии оно встречается четное число раз. Но число n – нечетное, поэтому один раз каждое число должно оказаться на диагонали.

(Примечание. Каждому участнику засчитывается только один вариант задачи)

Задача 12. (6-11) Имеется белый квадрат 21×21, разбитый на клетки 1×1. Петя покрасил какие-то n клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 есть ровно две покрашенных клетки. Найдите все значения, которые может принимать n.

Ответ. Все числа из промежутка от 210 до 231.

Решение. Один из вариантов раскраски – шахматная. В этом случае закрашены будут 220 или 221 клетки. Если раскраска не шахматная, то где-нибудь будут закрашены две клетки, имеющие общую сторону. Предположим, что эти клетки расположены на какой-то вертикали. Тогда, рассматривая квадраты 2×2, расположенные на горизонталях, содержащих эти клетки, устанавливаем, что по горизонталям цвета чередуются. Далее, переходя к соседним горизонталям, устанавливаем, что цвета чередуются на всех горизонталях. На каждой горизонтали может быть закрашено 10 или 11 клеток, поэтому минимально возможное значение n будет $10\times21 = 210$, а максимальное $11\times21 = 231$. Попробуем теперь найти примеры раскрасок для различных n. Назовем два способа чередующейся раскраски горизонтали как «раскраска 10» и «раскраска 11». Число n может равняться $210 + k$, если нижние k горизонталей закрашены «раскраской 11», а оставшиеся $21 - k$ верхних – «раскраской 10». Минимальное число $n = 210$ получится при $k = 0$, а максимальное – при $k = 21$. Реализуются и все промежуточные значения.