

Решения задач олимпиады памяти В.Р.Фридлендера, 6-7 класс

Казань, 9.04.2023

Задача 1. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) такие, что $p^2 - q^2 = r$.

Ответ: Единственное решение: $3^2 - 2^2 = 5$.

Решение: $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$ не будет простым, если $p - q > 1$. Значит $p = q + 1$, т.е. два простых числа расположены рядом. Это возможно лишь для чисел $p = 3$ и $q = 2$.

Задача 2. Вовочка за год написал 30 контрольных, причем имел оценки всех типов, от 2 до 5. Двоек и пятерок было поровну, а троек больше, чем четверок. Может ли оказаться, что сумма оценок равна: а) 100? б) 105?

Ответ. а) да; б) нет.

Решение. а) Пусть, например, у Вовочки было по 9 двоек и пятерок. Их сумма равна 63. Тогда троек и четверок вместе у него $30 - 9 - 9 = 12$, на них приходится сумма 37. Если бы каждая из оставшихся оценок была тройкой, сумма была бы равна 36. «Лишняя» единица – от того, что одну тройку заменили на четверку.

Итак, один из примеров – 9, 11, 1, 9 оценок каждого типа. Проверим: $9 + 11 + 1 + 9 = 30$; $9 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 9 \cdot 5 = 100$.

Существуют и другие решения.

б) Соберем в пары оценки (2; 5) и (3; 4). В силу того, что троек по условию больше, чем четверок, некоторые тройки останутся без пары. Значит пар будет $n < 15$, тогда непарных троек – $(30 - 2n)$. Сумма оценок в каждой паре равна 7, значит, сумма всех оценок равна $7n + 3(30 - 2n) = 90 + n < 90 + 15 = 105$.

Задача 3. Через $\max(,)$ обозначается наибольшее из списка чисел, через $\min(,)$ – наименьшее. Какое из чисел больше:

$$A = \max(a, b) - \max(a, b, c) + \max(b, c) - \max(a, b, c) + \max(c, a)$$

$$B = \min(a, b) - \min(a, b, c) + \min(b, c) - \min(a, b, c) + \min(c, a)$$

Ответ. Они равны между собой

Решение. Из трёх чисел a, b, c , какое-то будет наибольшим, какое-то наименьшим, и какое-то промежуточным, даже если между ними есть совпадения.

Из трёх чисел $\max(a, b)$, $\max(b, c)$, $\max(c, a)$, два будут равны наибольшему числу, а одно – промежуточному. Число $\max(a, b, c)$ равно наибольшему из чисел. Поэтому первая сумма равна промежуточному числу.

Аналогично (можно повторить рассуждения) вторая сумма равна промежуточному числу. Поэтому они равны между собой.

Задача 4. Учитель нарисовал четыре луча с началом в одной точке. Шестеро учеников измерили углы между этими лучами (каждый для своей пары), у них получились числа $30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ, 150^\circ$. Могло ли быть так, что все произвели измерения верно?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим три произвольных луча. Они образуют три угла, причем либо сумма всех трех равна 360° , либо больший из них равен сумме двух других. Сумма любых трёх из заданных углов не превосходит $150^\circ + 90^\circ + 70^\circ = 310^\circ$. С другой стороны, угол 150° не равен сумме никаких двух из заданных. Противоречие.

Задача 5. Периметр треугольника равен 23, а длины сторон являются натуральными (целыми положительными) числами. Сколько существует таких треугольников?

Ответ: 14.

Решение. Пусть стороны треугольника – это $a \leq b \leq c$. Самая большая сторона треугольника меньше суммы двух других, так что она имеет длину меньше половины периметра. То есть $c \leq 11$. С другой стороны, $23 = a + b + c \leq 3c$, так что $c \geq \frac{23}{3}$, то есть $c \geq 8$. Разберем все случаи

а) $c = 11, a + b = 12$. Значит, a принимает значения от 1 (тогда $b = 11 = c$) до 6 (тогда $b = 6 = a$). Всего 6 вариантов.

б) $c = 10, a + b = 13$. Значит, a принимает значения от 3 (тогда $b = 10 = c$) до 6 (тогда $b = 7$). Всего 4 варианта.

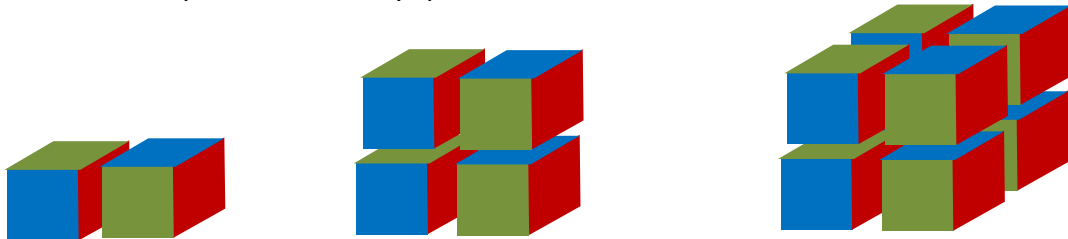
в) $c = 9, a + b = 14$. Значит, a принимает значения от 5 (тогда $b = 9 = c$) до 7 (тогда $b = 7 = a$). Всего 3 варианта.

г) $c = 8, a + b = 15$. Значит, a принимает значения от 7 (тогда $b = 8 = c$) до 7 (тогда $b = 8$). Всего 1 вариант.

Задача 6. Кубик $1 \times 1 \times 1$ раскрашен в 3 цвета (каждая пара противоположных граней – в один цвет). Из восьми таких одинаковых кубиков составляют куб $2 \times 2 \times 2$, причем прикладывают друг к другу гранями одного цвета. Можно ли сделать это так, что на каждой грани большого куба присутствуют по крайней мере 2 цвета?

Ответ. Нет.

Решение. Заметим, что раскраска грани повторяет раскраску параллельного ей сечения. Если, скажем, на передней грани есть (соседние) синий и зеленый кубики, то склеены они красной стороной. Будем считать, что они в нижнем ряду. Значит, «сверху» у них зеленая и синяя стороны. Прикладываем к ней кубики, они могут быть склеены только красной стороной. То же верно для тех, которые «сзади» и «сзади сверху». Но тогда второе сечение всё красное, как и две параллельные ему грани.



Решения задач олимпиады памяти В.Р.Фридлендера, 8-11 класс

Казань, 9.04.2023

Задача 1. Вовочка написал 15 контрольных, причем имел оценки всех типов, от 2 до 5. Двоек и пятерок было поровну, а троек больше, чем четверок. Чему может оказаться равна сумма его оценок?

Ответ. От 47 до 52.

Решение. Пусть было получено по k двоек и пятерок, m четверок и $m + x$ троек ($x > 0$).
Получаем

$$\begin{cases} k + m + x + m + k = 15 \\ 2k + 3(m + x) + 4m + 5k = S \end{cases}$$

Через S обозначена сумма оценок за контрольные. После упрощения получаем

$$\begin{cases} 15 - 2(k + m) = x \\ 7(k + m) + 3x = S \end{cases} \Rightarrow S = 45 + (k + m)$$

Все числа m, k, x положительны. Положительность x равносильна выполнению неравенства $k + m \leq 7$. Значит, $S = 45 + (k + m) \leq 52$. С другой стороны, $k \geq 1; m \geq 1$, так что $S \geq 47$.

Можно показать, что все эти значения S реализуются. Например, так: Вовочка получил по одной двойке и пятерке, $59 - S$ троек (это число лежит в пределах от 7 до 12) и $S - 46$ четверок (число лежит в пределах от 1 до 6, то есть их меньше, чем троек).

Задача 2. Квадратный многочлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ — составное.

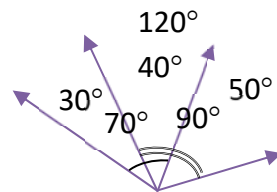
Решение. Пусть корни многочлена – x_1, x_2 . По теореме Виета $a = -(x_1 + x_2); b = x_1 x_2$. Значит, $a + b + 1 = x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. В силу того, что x_i по модулю больше 2, скобки не равны 0 или ± 1 .

Задача 3. Учитель нарисовал четыре луча с началом в одной точке. Шестеро учеников измерили углы между этими лучами (каждый для своей пары). У пятерых из них получились числа $30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ$. Шестой ученик измерял самый большой угол. Какой результат у него получился?

Ответ. Наибольший угол равен 120° .

Решение. Пусть самый большой из углов – угол $\angle AOB$. Если какой-то луч OC лежит вне этого угла, он образует с OA и OB углы, в сумме превосходящие 180° , но таких среди заданных углов нет. Значит, два других луча лежат внутри угла $\angle AOB$, каждый разбивает его на два угла. Значит, $\angle AOB$ можно двумя способами представить в виде суммы пары углов из заданного списка. Попарные суммы углов равны $70^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 110^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 130^\circ, 140^\circ, 160^\circ$. Только угол 120° повторяется дважды.

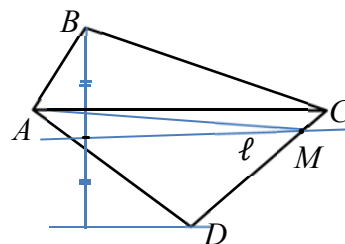
The diagram illustrates the geometric reasoning. It shows a large angle $\angle AOB$ formed by rays OA and OB . Two rays, OC and OD , originate from vertex O and lie within the angle $\angle AOB$. Ray OC divides $\angle AOB$ into 30° and 120° . Ray OD divides $\angle AOB$ into 70° and 110° . The angles between the rays are labeled as $30^\circ, 70^\circ, 40^\circ, 90^\circ, 50^\circ, 120^\circ$ in sequence from left to right.



Этот вариант реализуется. Например, так, как на рисунке.

Задача 4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Постройте прямую, проходящую через точку A , которая делит площадь четырехугольника пополам.

Решение. Пусть h_1, h_2 – высоты треугольников ABC и ADC , проведенные к основанию AC . Для определенности будем считать, что $h_1 \leq h_2$. Площади треугольников составляют $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot h_1$ и $S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot h_2$. Проведем прямую ℓ , параллельную AC , равноудаленно от вершин B и D . Пусть она пересекает сторону CD в точке M . Покажем, что прямая AM – искомая.



Действительно, высота треугольника AMC составляет $\frac{h_2-h_1}{2}$, значит,

$$S_{AMC} = \frac{S_{ADC} - S_{ABC}}{2} \Rightarrow S_{ABCM} = S_{ABC} + \frac{S_{ADC} - S_{ABC}}{2} = \frac{S_{ADC} + S_{ABC}}{2}$$

Решение основано на том, что площадь четырехугольника $ABCM$ пропорциональна сумме высот треугольников ABC и ACM , то есть «высоте» четырехугольника $ABCM$, отмеряемой перпендикулярно AC . Значит, половина площади достигается на половине «высоты». Аналогично можно поделить четырехугольник лучами, выходящими из A , на любое число равновеликих частей.

Задача 5. В день, когда не работает столовая, 26 одноклассников приносят из дома свои домашние обеды. Некоторые школьники угощают кого-то из одноклассников. Каждый школьник может получить угощение от любого количества одноклассников, однако сам угощает не более чем двоих. Доказать, что можно найти 6 человек, ни один из которых не угощает другого из этих шести.

Решение. Заметим, что в классе из n человек не более чем $2n$ «угощений», т.е. все школьники не более чем $4n$ раз выступают в ролях «угощающих» и «угощаемых». Значит, (по принципу Дирихле) найдется школьник, «связанный угощением» не более чем с 4 одноклассниками. Назовем такого школьника «интровертом». Если убрать из класса «интроверта» и всех, с кем он связан, в классе останется не менее 21 ученика. Если мы найдём среди них пятерых «попарно неугощающих», то, добавив «интроверта», получим искомую группу из 6 человек.

Итак, задача свелась к поиску 5 человек из 21. Аналогичными рассуждениями сводим ее к поиску 4 человек из 16; 3 из 11; 2 из 6 и, наконец, 1 из 1. Последнее очевидно, так как никто не угощает сам себя.

Задача 6. В школе учится 2023 школьника, причем некоторые являются фанатами спортивных команд. Оказалось, что у каждой двух команд ровно один общий фанат, и ни у каких трех команд общих фанатов нет. Каким может быть наибольшее число команд, у которых есть фанаты в этой школе?

Ответ. 64.

Решение. Пусть среди кумиров школы оказались команды A_i , $i = 1, \dots, k$, а школьники пронумерованы числами $1, 2, \dots, 2023$. Построим таблицу, в клетках которой записаны общие фанаты каждой пары команд (точнее, их номера). Ясно, что таблица будет симметричной относительно главной диагонали. Все номера, стоящие выше диагонали, различны (повторяющийся номер соответствовал бы двум парам команд, т.е. не менее, чем трем из них).

Но тогда в таблице содержится не менее $1 + 2 + \dots + (k - 1) = \frac{(k-1)k}{2}$ элементов. Итак, $\frac{(k-1)k}{2} \leq 2023$, откуда $k \leq 64$. Эта же таблица дает и пример, так как можно считать фанатами i -й команды всех школьников, номера которых стоят в соответствующей строке.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1		1	2	4	7	...
A_2	1		3	5	8	...
A_3	2	3		6	9	...
A_4	4	5	6		10	...
A_5	7	8	9	10		...
A_6	...	...	...	...	...	