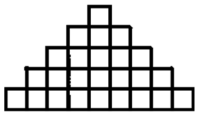
Решения задач олимпиады им. Фридлендера

13 апреля 2025

6-7 класс

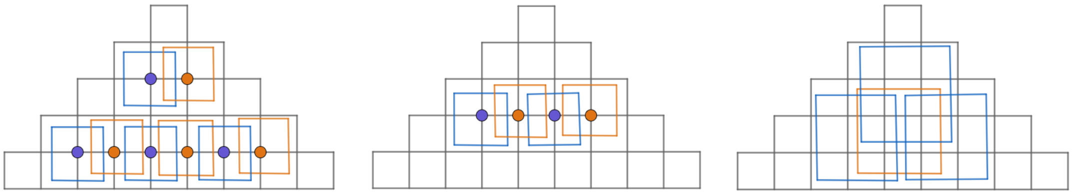
Задача 1.



Фигура, изображенная на рисунке, состоит из равных клеточек. Сколько квадратов можно на ней насчитать?

Ответ: 41 квадрат.

Решение. Будем считать квадраты по «слоям», сверху вниз. Квадратов размером в одну клетку будет 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25. Пронумеруем «строчки» клеточек сверху вниз. Квадраты со стороной 2 могут располагаться во втором и третьем ряду, их там 2. В третьем и четвёртом ряду их 4, в двух нижних – 6. Всего 2 + 4 + 6 = 12. Аналогично подсчитываем квадраты со стороной 3, их будет: 1 + 3 = 4. Всего 25 + 12 + 4 = 41 квадрат.



Критерии оценивания: Правильный подсчёт квадратиков отдельно по типам (25, 12 и 4) – 7 баллов. Ошибка в одном из чисел в пределах ±1 – минус 2 балла. Грубая ошибка в одном из чисел - всего 2 балла за задачу.

Ответ без объяснения – 0 баллов. Неправильно понятая задача – 0 баллов.

Задача 2.

В ряд записано 12 натуральных чисел. Известно, что если к каждому числу прибавить его соседей (или соседа для двух крайних), то получится число не меньше 2025. Какое наименьшее значение может принять сумма S всех чисел?

Ответ: 8102.

Решение. Требуется минимизировать сумму

$$S = (n_1 + n_2) + n_3 + (n_4 + n_5 + n_6) + (n_7 + n_8 + n_9) + n_{10} + (n_{11} + n_{12}) \geq$$
$$\geq 2025 + n_3 + 2025 + 2025 + n_{10} + 2025 \geq 8100 + n_3 + n_{10} \geq 8102$$

Значит, S не может быть меньше, чем 8102. Это значение достигается, например, если нашими числами будут: 1; 2024; 1; 1; 2023; 1; 1; 2023; 1; 1; 2024; 1.

Другой допустимый пример: 2; 2023; 1; 1; 2023; 1; 1; 2023; 1; 1; 2023; 2.

Критерии оценивания: Правильная оценка S ≥ 8102 – 4 балла. (Правильная оценка должна быть рассуждением, охватывающим общий случай: любые допустимые наборы чисел.) Правильный пример (удовлетворяющий условиям и достигающий оценки) – 3 балла. (Баллы за оценку и пример складываются.)

Ошибки в рассуждениях: если 0 считается допустимым числом – минус 2 балла. Если не рассматриваются особо крайние числа в ряду – всего 0 баллов за оценку S. Если доказательство оценки не применимо к общему случаю – всего 0 баллов за оценку S. Арифметические ошибки – минус 2 балла.

Задача 3.

Для победителей олимпиады были закуплены сувениры ценой 40, 60, 80, 130, 200, 240 рублей, по 2 штуки каждого типа. Организаторы хотят составить из них подарки одинаковой стоимости. Какое наибольшее число подарков они могут составить (в них должны входить все сувениры)?

Ответ: 3.

Решение. Общая цена всех сувениров равна 1500 рублей. В какие-то из подарков должны входить сувениры по 240 рублей, значит, цена подарка не менее 240 р, а их количество, соответственно, не более $\frac{1500}{240} = 6{,}25$. Итак, подарков может быть не более 6.

Пусть подарков 6, тогда цена каждого – 1500 : 6 = 250 р. Мы не сможем составить такой подарок с сувениром, стоящим 240 р.

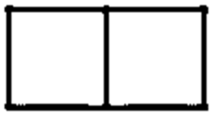
Пусть подарков 5, тогда цена каждого – 1500 : 5 = 300 р. Сувениры ценой 240, 240, 200 и 200 р должны оказаться в разных подарках. Имеем 300 = 240 + 60 – единственный способ составить сумму с числом 240 р. К 200 мы должны добавить 100 р, но у нас остались только сувениры за 40, 80 и 130 р, из них 100 не составишь.

Четыре подарка быть не может, так как 1500 при делении на 4 дает 375, такую сумму мы составить не можем, так все цены кратны 10.

Три подарка можно составить, например, так: 240 + 200 + 60 = 500 (два раза), остальные подарки в сумме также стоят 500 р.

Критерии оценивания: Только пример на 3 подарка – 3 балла. Полное обоснование того, что больше составить нельзя – ещё 4 балла.

Задача 4.



На бумаге нарисован прямоугольник из двух одинаковых квадратов, как показано на рисунке. Пользуясь только линейкой, постройте квадрат, площадь которого совпадает с площадью этого прямоугольника. Линейка без делений, с её помощью можно только проводить прямые через точки.

Решение. Каждая новая прямая может проходить через заданные точки (вершины квадратов) или через «новые», которые являются пересечением уже нарисованных прямых. Продолжим стороны и диагонали квадратов как показано на рисунках 1 и 2. Получим квадрат площадью 4 малых квадрата. Теперь соединим середины его сторон. Полученный квадрат и будет искомым. Потому что его площадь равна половине площади большого квадрата.

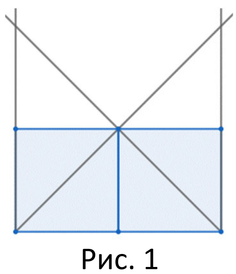


Рис. 1

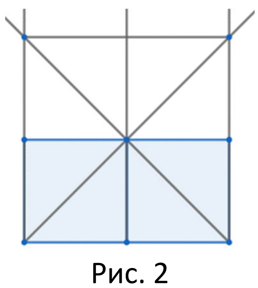


Рис. 2

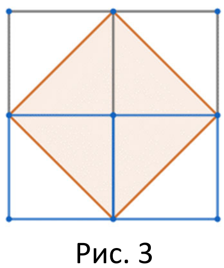


Рис. 3

Или так: он состоит из 4 прямоугольных треугольников, как и исходный прямоугольник.

Критерии оценивания. Если нарисован ответ, но не показано, как его построить линейкой – 3 балла. Использование «ножниц» и перекладывание треугольников не считается решением, так как построение нужно провести только с помощью линейки. Если построение проведено, но с ошибкой – минус два балла.

Задача 5.

Три спонсора оплатили нескольким ученикам путевки в лагерь «Квант». Организаторы попросили оплатить ещё одну путевку. Первый спонсор сказал: «Если я это сделаю, мои расходы на путевки возрастут в полтора раза». Второй: «А если я – мои расходы возрастут на 2/3». Третий: «А если я возьму это на себя, мои расходы увеличатся на 40%». Сколько путевок уже оплатили эти три спонсора?

Ответ: 6.

Решение. Для первого спонсора одна путевка составляет ½ от его расходов, значит, он уже оплатил 2 путевки. Для второго одна путевка – это 2/3 его расхода, значит, он оплатил 3/2 путевки. Для третьего одна путевка – это 40%=2/5 его расхода, значит, он оплатил 5/2. Втроем они оплатили $2+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=6$ путевок.

Критерии оценивания: Правильный подсчёт вкладов спонсоров: 2 путёвки, 1,5 путёвки, 2,5 путёвки – 7 баллов. Округление вкладов спонсоров до целых чисел – минус 2 балла. Ответ без объяснения – 0 баллов. Неправильно понятая задача – 0 баллов.

8-11 класс

Задача 1.

Число умножили на сумму его цифр, получили 2025. Найдите все такие числа.

Ответ: 225.

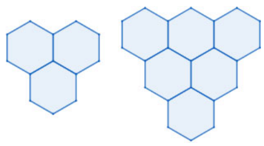
Решение. Имеем $2025=45^2=3^4\cdot 5^2$. Рассмотрим разложения числа 2025 на два множителя, причем первый будет искомым числом, а второй – суммой его цифр. Имеем

$$2025=2025\cdot 1=675\cdot 3=405\cdot 5=225\cdot 9=135\cdot 15=81\cdot 25=\cdots$$

Последующие разложения нам не нужны, так как у двузначного числа сумма цифр не больше 18. Сумма цифр первого сомножителя должна быть равна второму. Из всех вариантов нам подходит только $225\cdot 9$, так как 2 + 2 + 5 = 9.

Критерии оценивания: Наличие правильного ответа – 1 балл. В решении присутствует разложение на простые множители – 1 балл. Выписаны все приемлемые пары множителей с пояснением, что другие пары не подходят – 3 балла. Наличие верного вывода из всех предыдущих рассуждений – 2 балла. В полном решении присутствует неточность – минус 1 балл.

Задача 2.



Фараон Админхотеп решил построить треугольную пирамиду из шестиугольных блоков. В ее верхнем ярусе должен быть 1 блок, во втором сверху – 3 блока, в третьем – 6 и т.д. То есть в каждом ярусе номер n блоки укладываются в виде треугольника со стороной n.

а) Докажите, что на пирамиду из n ярусов понадобится $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ блоков.

б) В какой-то момент надзирающий за строительством писец Нетот записал, что выложено несколько полных ярусов, причем использовано 7/8 всех блоков. Не ошибся ли он?

Ответ: б) Писец ошибся.

Решение. а) Размер яруса номер n равен $\frac{n(n+1)}{2}$ блоков. Вся пирамида высотой n состоит из $S(n) = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$ блоков. Найдём эту сумму. Заметим, что $\frac{n(n+1)}{2}$ – это число сочетаний из n + 1 по 2. Найдем эти числа в треугольнике Паскаля (отмечены красным цветом, стоят на третьем месте в своей строке). Ясно, что 1 + 3 можно рассматривать также как сумму красной тройки и синей единицы. По свойству треугольника Паскаля эта сумма – четверка в следующей строке.

1
1 1
1 2 **1**
1 3 **3** ***1***
1 4 **6** ***4*** 1
1 5 **10** ***10*** 5 1
1 6 **15** ***20*** 15 6 1
1 7 **21** ***35*** 35 21 7 1

Аналогично, 4 + 6 = 10, это C_5^3 (значение на 4 месте в соответствующей строке) и т.д. Таким образом,

$$S(n) = C_{n+2}^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

По сути, мы применили доказательство по индукции. Можно было явно применить этот метод. При n = 1 имеем $C_{n+2}^3 = C_3^3 = 1$. Это база индукции.

Посмотрим, что получится, если к $S(n)$ прибавить очередное слагаемое:

$$S(n) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}(n+3) = S(n+1)$$

б) Пусть не достроено m ярусов пирамиды из n. Если писец прав, то эта часть составляет 1/8 от числа всех блоков, то есть $S(n) = 8S(m)$. Перепишем это равенство в следующем виде:

$$f(n) = n(n+1)(n+2) = 8m(m+1)(m+2) = 8f(m)$$

Видно, что n примерно равно $2m$. Левая часть является возрастающей функцией при n > 0. Найдём некоторые её значения.

$$f(2m) = 2m(2m+1)(2m+2) = 8m\left(m+\frac{1}{2}\right)(m+1) < 8f(m)$$

$$f(2m+1) = (2m+1)(2m+2)(2m+3) = 8\left(m+\frac{1}{2}\right)(m+1)\left(m+\frac{3}{2}\right) =$$

$$= 8(m+1)\left(m^2+2m+\frac{3}{4}\right) > 8f(m)$$

Значит, n должно лежать между $2m$ и $2m$+1, что невозможно.

Критерии оценивания: а) Полное решение – 2 балла. Перебор нескольких частных случаев – 0 баллов. Наличие индукции в решении задачи, но некоторые шаги отсутствуют – 1 балл.

б) Полное решение – 5 баллов. В решении присутствует идея, что из неиспользованных блоков можно составить пирамиду – 1 балл. В решении присутствуют неправильные выводы о кратности – минус 2 балла.

Задача 3.

Для строительства храма богу Тоту нужны блоки двух типов: кубы весом 2,3 т и колонны весом 2,5 т. Заказ передан в две каменоломни. За месяц в первой каменоломне сделали больше блоков, чем во второй. Зато во второй блоки имели больший суммарный вес. Какое наименьшее общее количество блоков могли сделать за это время каменоломни?

Ответ: 25.

Решение. Обозначим искомое число блоков через b, из них k вытесано в первой каменоломне и $(b-k)$ во второй. Можем считать, что в первой делали только кубы. Если это не так, заменим колонны на кубы, при этом вес сделанных блоков только уменьшится. Аналогично можем считать, что во второй каменоломне делали только колонны.

Тогда условия задачи можно переписать в виде

$$\begin{cases} k > b-k \\ 2{,}3k < 2{,}5(b-k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 2k \\ 4{,}8k < 2{,}5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \le 2k-1 \ \text{(в силу целочисленности)} \\ k < \dfrac{25}{48}b \end{cases}$$

Получаем двойное неравенство для k: $\frac{b+1}{2} \le k < \frac{25}{48}b$. Ясно, что оно может иметь решение, только когда $\frac{b+1}{2} < \frac{25}{48}b$, то есть $24b + 24 < 25b$; $b > 24$. Итак, наименьшее значение для b не менее 25.

Покажем, что это число достигается: при b = 25 условие на k имеет вид $13 \le k < \frac{25}{48} \cdot 25 = 13{,}02\ldots$, откуда k=13.

Мы получили такой пример: в первой каменоломне сделали 13 кубов, общим весом $13 \cdot 2{,}3 = 29{,}9$ тонн, а во второй – 12 колонн общим весом $12 \cdot 2{,}5 = 30$ тонн.

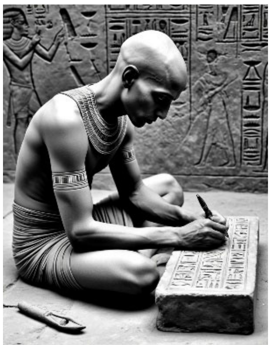
Замечание. При решении системы неравенств можно было получить сначала ограничение на k. Но тогда надо доказать, что меньшему k соответствует меньшее b.

Критерии оценивания: В решении присутствует правильный ответ – 1 балл. Нестрогие обоснования (например, наличие 2,5 / 0,2 = 12,5), но логика не доведена до конца – еще 2 балла.

Задача 4.

Писец Нетот записал в своих мемуарах: «Фараону Админхотепу на завтрак всегда подавали финики, 11 черных и 14 коричневых. При этом их так раскладывали в два одинаковых сосуда, что вероятность не глядя вынуть черный финик из случайно выбранного сосуда была равна 2/3». Возможно ли это?

Ответ: Да, возможно.



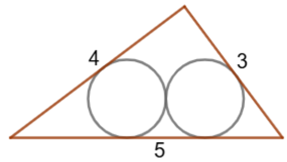
Решение. Пусть вероятность вынуть черный финик из первого сосуда равна p_1, а из второго – p_2. Тогда вероятность вынуть его из случайно выбранного сосуда равна $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{2}{3}$. Из этого равенства следует, что $p_1 + p_2 = \frac{4}{3}$. Можно, скажем, взять одну из вероятностей равной 1, а вторую – 1/3. Например, в первом сосуде только черные финики, а во втором 1/3 черных и 2/3 коричневых. При этом 2/3 – это 14 фиников, значит, к ним добавляется 7 черных. В первом же сосуде будет только 4 черных финика.

Можно показать, что других вариантов раскладки нет.

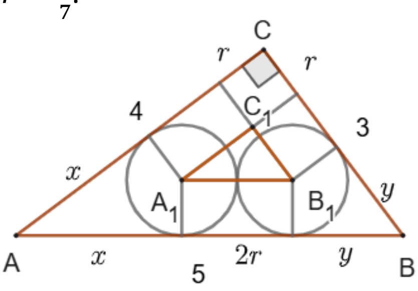
Критерии оценивания: Правильно составлено уравнение (система уравнений) для количества черных и коричневых фиников в сосудах – 3 балла. Замечено, что уравнению (системе уравнений) из первого пункта удовлетворяет случай, когда условные вероятности вынуть черный финик из сосудов равны 1 и 1/3 – ещё 2 балла.

Задача 5.

У мастера есть плоская заготовка в виде «египетского треугольника» со сторонами 3, 4, 5. Из неё надо вырезать две одинаковые круглые детали. Каков наибольший возможный радиус таких деталей?



Ответ: $r = \frac{5}{7}$.



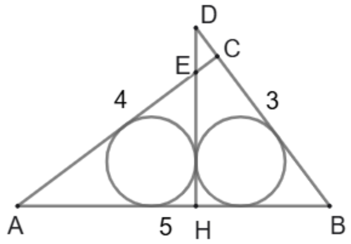
Решение. 1 способ. Пусть ABC – исходный треугольник, причем AC = 4, BC = 3, AB = 5. Ясно, что он прямоугольный. Пусть окружности расположены как на рисунке (то есть вписаны в острые углы треугольника). Обозначим радиус окружностей через r, а их центры как A_1 и B_1.

Опустим перпендикуляры из точек A_1 и B_1 на стороны треугольника ABC. Они образуют треугольник $A_1B_1C_1$.

Стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ попарно параллельны, поэтому эти треугольники подобны между собой. Обозначим равные касательные к окружностям через x и y, как показано на рисунке. Тогда стороны меньшего треугольника будут равны $3 - y - r$; $4 - x - r$ и $2r$. Значит,

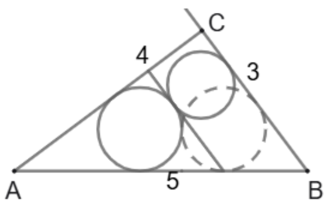
$$\frac{3 - y - r}{3} = \frac{4 - x - r}{4} = \frac{2r}{5}$$

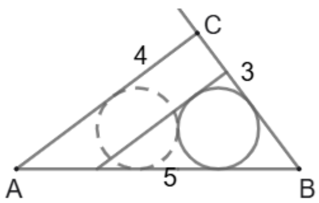
Тогда $4 - x - r = \frac{8}{5}r$; $3 - y - r = \frac{6}{5}r$. Сложив два эти уравнения, получим в левой части величину $7 - (x + y + 2r) = 7 - 5 = 2$. Значит, $2 = \frac{14}{5}r$, откуда $r = \frac{5}{7}$.



2 способ. Проведем перпендикуляр к гипотенузе через точку касания двух окружностей (он будет их общей касательной). Пусть он пересекает прямые, на которых лежат катеты, в точках D и E (см. рисунок). Заметим, что треугольники DHB и AHE подобны исходному по двум углам. Значит, они подобны и между собой. Но радиусы вписанных в них окружностей совпадают. Значит, эти треугольники равны.

Тогда AH : HB = AH : HE = 4 : 3, то есть AH составляет 4/7 от 5. Коэффициент подобия треугольников AEH и ABC равен $AH{:}AC = \left(\frac{4}{7} \cdot 5\right) : 4 = \frac{5}{7}$. Но тогда и радиус окружности, вписанной в AEH, составляет 5/7 от радиуса окружности, вписанной в египетский треугольник. Известно, что последний равен 1 (это значение можно получить, записывая двумя способами площадь треугольника).





Замечание. Можно, вообще говоря, «вписать» одну из деталей в прямой угол. По рисунку ясно, что тогда радиус надо уменьшить. Общая касательная будет перпендикулярна одному катету и параллельна второму. Пунктирная окружность на рисунке не помещается в полосу между касательной и катетом BC. Например, туда не входит точка ее касания со сплошной окружностью. То есть пунктирная окружность больше той, которую можно вписать в угол. Это же верно и для второго угла.

Доказывать это не обязательно.

Задача 6.

В боксерском клубе 101 человек. Известно, что для любой группы из 50 членов клуба найдется ещё один боксер из оставшихся, который провел хотя бы один бой с каждым из группы. Докажите, что есть человек, который провел хотя бы по одному бою с каждым из 100 остальных участников.

Решение. Возьмём какую-нибудь упорядоченную группу из 50 человек: $N_1, N_2, \dots, N_{50}$. Есть человек N_{51}, который провел бой со всеми ними. Поместим его в конец списка и удалим первого. Теперь у нас есть группа, в которое последний провел бой со всеми оставшимися.

Далее, у нас есть человек N_{52}, который провел бой со всеми из списка (это может быть и первый), поместим его в конец списка и удалим N_2. Теперь у нас есть группа, в которой 2 последних провели бой со всеми оставшимися. Продолжим этот процесс, пока у нас не появится группа из 50 человек, где каждый провёл бой со всеми.

По условию задачи, есть ещё один боксер, который провел бой с каждым из этой группы. Добавив его, получим группу G из 51 человека, где каждый провёл бой с каждым.

Теперь посмотрим на оставшихся 50 человек. По условию задачи, в группе G есть боксер, который провёл бой с каждым из оставшихся. Этот боксер и есть нужный нам человек, он провёл бой со всеми остальными.

Критерии оценивания: Продвижение в решении: присутствует процесс добавления и удаления в некоторую группу из 50 (51) человек других членов клуба, удовлетворяющих некоторым условиям – 4 балла. Наличие небольших погрешностей в решении задачи – минус 1 балл.