Решения задач олимпиады им. Фридлендера, 12 апреля 2026

6-7 класс

Задача 1. а) Даны три целых числа, не равных 0. Может ли каждое из них делиться нацело на сумму двух остальных?

б) Существуют ли четыре целых числа таких, что каждое делится на разность любых двух других?

Ответ: а) Может, $\{a, b, -a-b\}$. б) Нет, не существует.

Решение. б) Ясно, что все числа должны быть различны (на 0 делить нельзя). Пусть они равны $a < b < c < d$. Из того, что b делится на d-a и c делится на d-a следует, что c-b также делится на d-a. Но этого не может быть, так как $0<c-b<d-a$.

Задача 2. 10 сумок весят каждая целое число килограммов, причем никакие две не весят одинаково. Их суммарный вес оказался равным 60 кг. Чебурашка сказал: «Гена, давай я понесу две самых тяжелых сумки». Какой минимальный вес мог ему достаться?

Ответ: 21 кг.

Решение. Расставим сумки от легкой к тяжелой. Если они весят 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 килограммов, то Чебурашке достанется 10+11=21 кг. Может ли ему достаться меньше?

Ясно, что девятый вес не менее 9 кг. Если он равен 9 кг, то сумма первых девяти весов равна 45 кг, значит, на последний приходится 15 кг. Но 9+15=24>21. Итак, девятый предмет должен весить не менее 10 кг. Но тогда десятый предмет весит не менее 11 кг, так что сумма двух весит не менее 21 кг.

Задача 3. Квадрат имеет периметр 40 м. а) Можно ли разрезать его на 5 прямоугольников так, чтобы их суммарный периметр был мене 70 м? б) А на 100 прямоугольников?

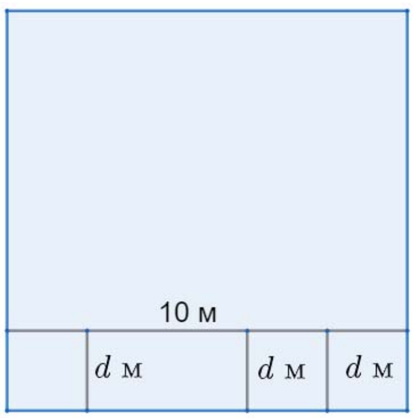
Ответ: а) да; б) да.

Решение. Сторона квадрата равна 10 м. Заметим, что каждый отрезок разреза становится стороной (или частью стороны) двух прямоугольников. Это значит, что в суммарный периметр входит удвоенная длина этого отрезка.

Значит, суммарный периметр новых прямоугольников равен 40+2L, где L – общая длина разрезов. По условию $40 + 2L < 70$, откуда $L < 15$ м.

Можно сделать это, например, так, как на рисунке.

Общая длина разреза равна 10 + 3d < 15, откуда d < 5/3 м. Например, первым разрезом можно отрезать полоску шириной d = 1 м. Тогда суммарный периметр будет равным 66.



б) Ясно, что этот рисунок легко обобщить на любое число частей, не меньше 2. Узкий прямоугольник можно разрезать на любое число частей, например, на 99. Тогда суммарная длина разреза будет равна $10 + 98d < 15$. Значит, должно быть $d < \frac{5}{98}$. Например, можно взять d=5/100 м, то есть 5 см.

Ясно, что 70 можно заменить в задаче любым числом, большим 60, а 100 – любым натуральным числом.

Задача 4. Крокодил Гена и Чебурашка играют в следующую игру. На доске написаны числа от 1 до 17. Вначале Гена стирает какие-то 8 чисел. Затем Чебурашка стирает еще 4 числа. После этого Гена стирает 2 числа и Чебурашка – одно. В результате на доске остается два числа, Чебурашка должен отдать Пете количество конфет, равное разнице между этими числами. Каков максимальный выигрыш может гарантировать себе Гена при оптимальной игре?

Ответ: 4 конфеты.

Решение. Первым ходом Гена должен стереть все четные числа, после этого останется 9 нечетных чисел, разделим их на 2 группы: дающих при делении на 4 остаток 1 (5 чисел) и остаток 3 (4 числа). После того, как Чебурашка уберет 4 каких-то числа и на доске останется 5 чисел, в одной группе останется 2 или меньше чисел, и Гена должен удалить полностью эту группу. То есть на доске останется 3 числа, дающих одинаковый остаток при делении на 4, и Гена гарантирует себе выигрыш в 4 конфеты.

Почему не получится гарантировать выигрыш в 5 конфет? Перед первым ходом Чебурашки на доске написано 9 чисел с максимальной разностью 16, Чебурашка может уменьшить эту разность в два раза, то есть оставить числа с максимальной разностью 8. Для этого рассмотрим две группы: числа от 1 до 8 и числа от 10 до 17.

В какой-то группе будет 4 или менее числа, Чебурашка должен стереть эту группу. Аналогично, перед вторым ходом Чебурашки на доске три числа имеют максимальную разность 8 и Чебурашка может уменьшить эту разность в 2 раза, то есть оставить два числа с максимальной разностью 4.

Задача 5. В стране работают три авиакомпании. Каждый рейс соединяет два города и включает два перелёта (туда и обратно), обслуживается одной авиакомпанией. Из одного аэропорта есть ровно 2 вылета в разные города, из всех остальных — по 3 вылета. Возможно ли, чтобы из каждого аэропорта все вылеты выполнялись разными авиакомпаниями? Если да — нарисуйте схему. Если нет — объясните почему.

Ответ: Нет не может.

Решение. Допустим противное: в одном из аэропортов есть два вылета, которые обслуживаются компаниями X и Y, а в каждом из остальных аэропортов работают все три авиакомпании X, Y, Z. Заметим, что по лемме о рукопожатиях общее число n аэропортов нечетное. Действительно, число рейсов, подсчитанное по всем аэропортам, равно 2+3(n-1)=3n-1, что должно совпадать с удвоенным числом вылетов. Значит, 3n-1 четно, а n, соответственно, нечетно.

С другой стороны, рассмотрим только рейсы авиакомпании X. По предположению, в каждом городе есть ровно один рейс, выполняемый X. Значит, города разбиваются на пары, связанные рейсами авиакомпании X, то есть их четное число. Противоречие.