Решения задач олимпиады им. Фридлендера, 12 апреля 2026

8-11 класс

Задача 1. Даны три целых числа, сумма которых равна 2026. Может ли каждое из них делиться нацело на сумму двух остальных? Если да, найдите все возможные тройки таких чисел.

Ответ: {0; 1013; 1013}.

Решение. Пусть одно из чисел равно 0, то есть тройка имеет вид (a, b, 0). Число 0 делится на любое ненулевое число, так что надо только потребовать, чтобы a делилось на b+0=b и b делилось на a+0=a. Но тогда либо b=-a и сумма всех чисел равна 0, либо b=a и сумма всех чисел равна 2a=2026.

Пусть теперь ни одно из чисел не равно 0.

1 способ. По условию a делится на 2026-a, a=k(2026-a), откуда (k+1)a=2026k. Числа k и k+1 взаимно простые, значит, k+1 – делитель 2026.

$$a = \frac{2026}{k+1}k = 2026 - \frac{2026}{k+1}$$

Если знаменатель отрицателен, то a>2026. Если он положителен, то он не меньше 2 (если k+1=1, то a=0). Но тогда

$$a \geq 2026 - \frac{2026}{2} = 1013$$

Итак, все искомые числа не меньше 1013, так что их сумма не менее 3039. Пришли к противоречию.

Другое рассуждение – просто перечислить делители и соответствующие a:

k+1	2026	-2026	1013	-1013	2	-2	1	-1
a	2025	2027	2024	2028	1013	3039	0	4052

Все ненулевые a не меньше 1013.

2 способ. Ясно, что искомые три числа не могут быть все положительны, так как иначе самое маленькое из них будет меньше суммы двух других и не может делиться на неё. Аналогично, они не могут быть все отрицательными.

Пусть одно из чисел отрицательно, а два другие – положительны. Если это не так, можно сменить знаки у всех чисел.

Итак, ищем тройку чисел в виде $(-a, b, c)$, причем $-a < 0 < b \leq c$. По условию положительное число a делится на положительное число b+c, a=k(b+c), тогда k>=1.

Если k=1 получаем тройку (-b-c, b, c), но здесь S=0.

Пусть k >1. По условию b делится на c-a (а значит, и на a-c). В силу ограничения на k имеем a-c=kb+(k-1)c>b, пришли к противоречию.

Замечание. Задача имеет только решения с суммой 0 или вида {0; a, a}.

Задача 2. Корни квадратных уравнений $x^2 - 2px + q_1 = 0$ и $x^2 - 2px + q_2 = 0$, $q_2 > q_1$ являются четырьмя различными последовательными членами арифметической прогрессии.

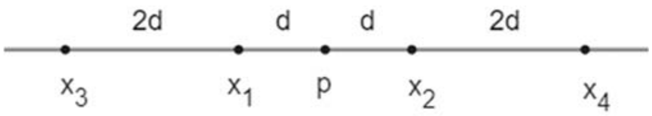
а) Чему может быть равно p при $q_1 = 7; q_2 = 15$?

б) Найдите условия, которым удовлетворяют коэффициенты, в общем виде.

Ответ: а) $p = \pm 4$; б) $q_1 = 9q_2 - 8p^2$, $p^2 > q_2$.

Решение. б) Из условия следует, что каждое уравнение имеет по два различных корня. Значит, их дискриминанты положительны, что сводится к условиям $p^2 > q_1; p^2 > q_2$.

Корни каждого из заданных уравнений расположены симметрично относительно p, так что корни одного из уравнений есть $x_1 = p - d, x_2 = p + d$, $(d > 0)$, а другого – $x_3 = p - 3d, x_4 = p + 3d$.



Тогда свободный член первого уравнения равен $(p - d)(p + d) = p^2 - d^2$, второго – $(p - 3d)(p + 3d) = p^2 - 9d^2$, меньше предыдущего, значит, $p^2 - d^2 = q_2$, $p^2 - 9d^2 = q_1$.

Вычтя из первого уравнения второе, получим, что $8d^2 = q_2 - q_1$. Это уравнение имеет единственное положительное решение d в силу того, что $q_2 > q_1$. Исключив из этой системы уравнений d^2, получим, что $9q_2 - q_1 = 8p^2$. Вычисление показывает, что условие $p^2 > q_2$ сводится к $q_2 > q_1$, а значит, при этом выполняются также ограничения на дискриминанты.

Например, пусть $q_1 = 7; q_2 = 15$ тогда $p = \pm 4$.

Задача 3. В стране 170 населённых пунктов – 20 городов и 150 посёлков. Каждый город соединен дорогами со 100 или более населенными пунктами, каждый поселок – с 11 или менее населенными пунктами. Страна разделена на 36 областей. Доказать, что есть область, в которой нет дорог между населенными пунктами этой области.

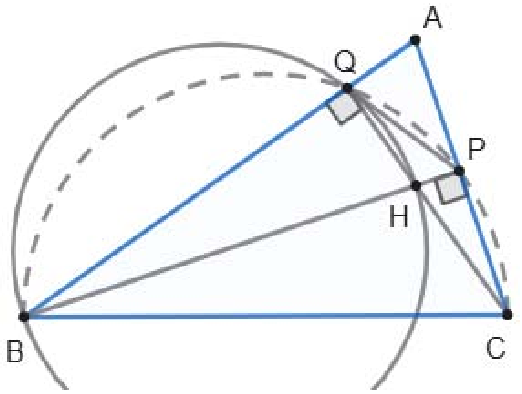
Решение: Посчитаем, сколько дорог ведут из городов в поселки. Из городов выходит $20 \cdot 100 = 2000$ или более дорог, из них в другие города ведут $20 \cdot 19 = 380$ или менее дорог. Значит, $2000 - 380 = 1620$ или более дорог ведут из городов в поселки.

Теперь посмотрим, сколько дорог могут соединять друг с другом поселки. Из посёлков выходит $150 \cdot 11 = 1650$ или менее дорог, но большинство из них ведут в города, в другие поселки ведут $1650 - 1620 = 30$ или менее дорог.

Значит, существует 15 или менее пар посёлков, соединённых дорогами друг с другом.

Всего областей 36, из них 16 или более областей без городов. Из этих 16 областей только в 15 или менее областей могут быть дороги между входящими в область посёлками. Значит существует область, состоящая только из посёлков, не соединённых друг с другом дорогами.

Задача 4. В треугольнике ABC точки P и Q – основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно. Проведём окружность через вершину B, точку Q и ортоцентр H. Пусть отрезок PQ касается этой окружности в точке Q. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.



Решение. Рассмотрим случай остроугольного треугольника. Случаи, когда углы A или C тупые, или треугольник прямоугольный, исключаются условиями задачи, а случай тупого угла B аналогичен остроугольному треугольнику.

Угол между касательной QP и хордой QH равен углу QBH, опирающемуся на ту же дугу QH. Из прямоугольного треугольника ABP получаем, что $\angle PQC = \angle ABP = 90^\circ - \angle A$. Аналогично из прямоугольного треугольника AQC получаем, что и $\angle ACQ = 90^\circ - \angle A$. Значит, треугольник QPC – равнобедренный, $PQ = PC$.

Далее возможны разные пути решения. Можно заметить, что точки B, Q, P, C лежат на одной окружности (с диаметром BC). Мы доказали, что углы CQP и QCP равны. Значит, равны и дуги QP и PC. Но тогда равны и углы ABP и PBC, то есть BP является и высотой, и биссектрисой, откуда и следует, что треугольник ABC равнобедренный. Также можно доказывать равенство $PC = QP = AP$.

Задача 5. Ученый с мировым именем Иннокентий имеет 4 разные монеты, причем они могут быть и несимметричными (то есть вероятности выпадения орла и решки у монеты могут не совпадать). Он установил, что вероятность выпадения чётного числа орлов при подбрасывании всех четырех монет равна вероятности выпадения нечетного их числа. Можно ли утверждать, что среди отобранных монет есть хотя бы одна симметричная?

Ответ: Да.

Решение. Пусть p_k и q_k – вероятности выпадения орла и решки у монеты под номером k. Для n монет введем вероятности $P_1(n)$ – вероятность нечетного числа орлов для n первых монет и $P_2(n)$ – вероятность четного числа орлов для n первых монет. По условию $P_1(4) = P_2(4)$.

Заметим, что

$$P_1(n) = p_n P_2(n-1) + q_n P_1(n-1);$$
$$P_2(n) = p_n P_1(n-1) + q_n P_2(n-1)$$

Значит, условие $P_1(n) = P_2(n)$ сводится к

$$P_1(n) - P_2(n) = (p_n - q_n)\big(P_2(n-1) - P_1(n-1)\big) = 0.$$

Продолжив этот процесс, получим равенство

$$(p_n - q_n)(p_{n-1} - q_{n-1}) \ldots (p_1 - q_1) = 0.$$

Значит, для какого-то номера выполняется $p_k = q_k$, что и требовалось доказать. Утверждение задачи верно для любого числа монет, не только для 4.