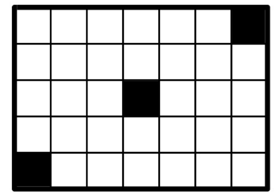
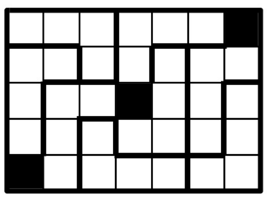
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап (решения/ответы)
2022–23 учебный год
5 класс



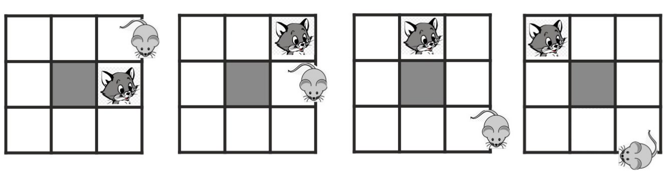
Задание 1. Из прямоугольника 5×7 вырезали три клетки (см. рисунок). Разрежьте по линиям сетки оставшуюся фигуру на 8 равных частей. *Части называются равными, если их можно совместить наложением.* В решении достаточно привести один правильный пример разрезания. (20 баллов)

Решение. Можно разрезать, например, так.

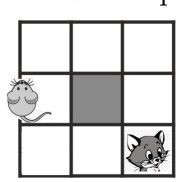


Критерии. Любой верный пример — 20 баллов.

Задание 2. Кот бегает против часовой стрелки по восьми квадратикам, каждую секунду перемещаясь в соседний квадрат. Мышь бегает по часовой стрелке по периметру большого квадрата, перемещаясь каждую секунду на следующий отрезок (см. рисунок). На картинке слева направо показаны стартовая позиция, а потом — позиции через 1, 2 и 3 секунды после старта соответственно. Где будут кот и мышь спустя 2023 секунды после старта? (20 баллов)



Ответ. См. картинку.



Решение. Через каждые 8 секунд кот возвращается в стартовую позицию, а через каждые 12 секунд мышь возвращается в стартовую позицию. Следовательно, через 24 секунды картинка совпадет со стартовой, так как 24 делится и на 8, и на 12. Поскольку $2023 = 24 \cdot 84 + 7$, спустя 2023 секунды позиция повторит ту, которая была после седьмой секунды, т.е., позицию, показанную на картинке (от последней картинки в условии задачи мышь и кот должны сделать по четыре шага).

Критерии. Только верный ответ для обоих животных (без рассуждений или доказательств) — 5 баллов.

Ошибка в подсчете остатка при делении на 24 (или обоих остатков при делении на 8 и 12) при верном в остальном рассуждении — 8 баллов.

При подсчете по отдельности верно подсчитана позиция одного животного, и сделана ошибка в делении с остатком при подсчете позиции другого при верном в остальном рассуждении — 12 баллов.

При подсчете по отдельности верно подсчитана позиция одного животного, а рассуждение по второму животному полностью неверно или отсутствует (например, неверно указана длина цикла этого животного) — 8 баллов.

Задание 3. На празднике присутствовали несколько супружеских пар (других людей по отдельности не было). Каждый мужчина съел на три апельсина больше, и на два мандарина меньше, чем его жена. Оказалось, что апельсинов и мандаринов было съедено поровну. Докажите, что общее количество гостей делится на 4. (20 баллов)

Решение. Каждая пара супругов в сумме съела четное число мандаринов, поскольку два числа, отличающиеся на 2, имеют одинаковую четность, и тогда их сумма четна. Поэтому общее количество съеденных гостями мандаринов четно, как сумма нескольких четных чисел.

Аналогично, каждая пара супругов в сумме съела нечетное число апельсинов, поскольку два числа, отличающиеся на 3, имеют разную четность, и тогда их сумма нечетна. Так как общее число апельсинов равно общему числу мандаринов, то оно четно. Но сумма нескольких нечетных чисел четна в том и только в том случае, когда их — четное количество. Следовательно, супружеских пар было четное число $2k$, а тогда общее количество гостей равно $4k$, то есть, кратно четырем.

Критерии. Замечено, что каждая пара супругов съела четное число мандаринов — 4 балла.

Замечено, что каждая пара супругов съела нечетное число апельсинов — 4 балла. Эти критерии суммируются.

Задание 4. В ряд стоят шесть человек, каждый из которых либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Первый говорит: «Справа от меня ровно пять лжецов», второй: «Слева от меня ровно один лжец», третий: «Справа от меня ровно три лжеца», четвертый: «Слева от меня ровно три лжеца», пятый: «Справа от меня ровно один лжец», шестой: «Слева от меня ровно один лжец». Кто из них кто? Номера людей считаются слева направо. (20 баллов)

Ответ. Слева направо: Л, Р, Л, Л, Р, Л.

Решение. Будем называть людей аборигенами острова рыцарей и лжецов.

Первый абориген не может говорить правду, так как тогда все люди, стоящие правее него, — лжецы, но в этом случае пятый абориген говорит правду. Следовательно, первый абориген лжет.

Тогда второй абориген говорит правду. Отсюда следует, что четверый абориген точно лжет, а тогда и шестой тоже лжет (левее него уже минимум два лжеца).

Поэтому пятый абориген говорит правду, а следовательно, третий лжет.

Замечание. Аналогичное рассуждение можно проводить справа налево.

Критерии. Доказано, что первый абориген лжет, а второй говорит правду — 4 балла.
Доказано, что четвертый абориген лжет — 4 балла.
Доказано, что шестой абориген лжет — 4 балла.
Доказано, что пятый абориген говорит правду — 4 балла.
Доказано, что третий абориген лжет — 4 балла.
Аналогичные критерии применяются при рассуждении справа налево.

Задание 5. В 5А классе провели опрос, кто какие фрукты любит. Оказалось, что 13 школьников любят яблоки, 11 — любят сливы, 15 — любят персики и 6 — любят дыню. Школьник может любить больше одного фрукта. Каждый школьник, любящий сливы, также любит либо яблоки, либо персики (но не то и другое сразу). А каждый школьник, который любит персики, также любит либо сливы, либо дыни (но не то и другое сразу). Какое минимальное количество людей может быть в 5А? (20 баллов)

Ответ. 22 человека.

Решение. *Оценка.* Поскольку персики любит 15 человек, а дыни — 6, то есть по крайней мере 9 людей, которые любят персики, но не любят дыни. Тогда все эти люди любят сливы, но не любят яблоки. Тогда кроме этих людей есть еще не менее 13 людей, любящих яблоки. Значит, всего людей не менее 22.

Пример. Пусть 6 человек любят дыни, персики и яблоки, 9 человек любят сливы и персики, 2 человека любят сливы и яблоки и 5 человек любят только яблоки. Легко видеть, что при этом общее число людей равно 22, причем все остальные условия задачи выполнены.

Критерии. Оценка — 10 баллов.
Пример — 10 баллов.