Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап (решения/ответы)
2022–23 учебный год
7 класс

Задание 1. В кружке занимается 36 школьников. Если на занятие придут любые 33 из них, то девочек в любом случае будет больше половины. А если на занятие придет 31 ученик, то может оказаться так, что больше половины из них — мальчики. Сколько девочек занимается в кружке? (20 баллов)

Ответ. 20.

Решение. Так как среди любых 33 детей девочек больше половины, то мальчиков среди них меньше половины, то есть, не больше 16. Тогда мальчиков всего не больше 16, потому что если бы их было хотя бы 17, могло бы оказаться, что пришло 17 мальчиков и еще 16 каких-то школьников, и мальчиков уже было бы больше половины.

Так как существует группа из 31 школьника, в которой больше половины мальчиков, то в этой группе минимум 16 мальчиков. Следовательно, их всего ровно 16. Тогда девочек $36 - 16 = 20$.

Критерии. Показано только, что мальчиков не меньше 16 — 4 балла.

Показано только, что мальчиков не больше 16 — 8 баллов.

Задание 2. Можно ли числа от 1 до 1000 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе было хотя бы два числа, и при этом в каждой группе сумма *любых двух* чисел делилась на 3? (20 баллов)

Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Предположим, что требуемое возможно. Разделим каждое число от 1 до 1000 на 3 с остатком. Легко видеть, что у нас есть 333 числа, которые делятся на 3 нацело, 333 числа, которые делятся на 3 с остатком 2, и 334 числа, которые делятся на 3 с остатком 1. Заметим, что никакие два числа с остатком 1 не могут входить в одну группу, т.к. сумма двух таких чисел не делится на 3. Значит, эти числа содержатся в 334 различных группах. Тогда по меньшей мере в одной из этих групп нет чисел, имеющих остаток 2 при делении на 3 (так как таких чисел всего 333). Тогда в этой группе, помимо числа, имеющего остаток 1 при делении на три, должно быть число кратное трем. Но сумма двух таких чисел не делится на 3. Противоречие.

Критерии. Доказано, что все числа вида $3k + 1$ в разных группах — 8 баллов.

Задание 3. Саша выбрал пять чисел из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 и сообщил Ане их произведение. Исходя из этих данных Аня поняла, что она не может однозначно определить чётность суммы выбранных Сашей чисел. Какое число Саша сообщил Ане? (20 баллов)

Ответ. 420.

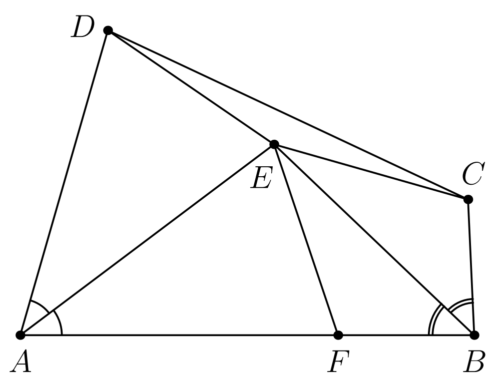
Решение. Посмотрим на два оставшихся числа. Так как Аня знает сумму всех чисел от 1 до 7 (она равна 28), то эти два оставшихся числа таковы, что по их произведению нельзя определить четность их суммы. Поэтому их произведение можно представить двумя способами: $ab = xy$, причем числа a и b — разной четности, а числа x и y — одной. Тогда ab четно, поэтому xy четно, значит одно из них делится на 2, но тогда x и y — оба четные. Поэтому $xy = ab$ делится на 4, и, следовательно, четное из чисел a и b равно 4 (других кратных четырем чисел у Ани просто нет). Тогда пара чисел x и y — это обязательно 2 и 6. Их произведение равно 12, следовательно, в паре с числом 4 стоит число 3.

Таким образом, произведение двух оставшихся чисел обязательно равно 12. Следовательно, произведение Сашиных чисел равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7/12 = 420$.

Критерии. Только ответ — 5 баллов.

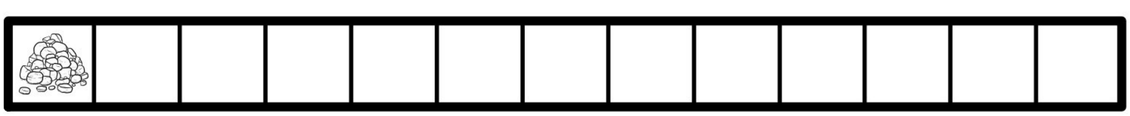
Задание 4. Четыре точки A, B, C, D таковы, что D и C лежат по одну сторону относительно прямой AB и выполнено равенство $AB = AD + BC$. Биссектрисы углов ABC и BAD пересекаются в точке E. Докажите, что $CE = DE$. (20 баллов)

Решение. Отметим на отрезке AB точку F таким образом, что $AF = AD$, тогда $FB = BC$. Осталось заметить, что треугольники FAE и DAE равны по двум сторонам и углу между ними, как и треугольники FBE и CBE, откуда $ED = EF = EC$.



Критерии. Найдено только одно равенство треугольников — 6 баллов.

Задание 5. Петя и Вася играют в такую игру. На крайнем левом поле клетчатой полоски, состоящей из 13 клеток, лежит кучка из 2023 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из ребят своим ходом может сдвинуть любой камень на одно или на два поля вправо. Выигрывает тот, кто первым поставит любой камень на крайнюю правую клетку. Кто из ребят может выиграть вне зависимости от игры соперника? (20 баллов)



Ответ. Вася.

Решение. Вася должен после каждого хода Пети двигать тот же камень на 1, если Петя двинул его на 2, и наоборот. При такой игре Вася всегда будет ставить камень на поле, номер которого равен 4, 7, 10 или 13, а Петя никогда не сможет сходить на такое поле. Поскольку в игре возможно только конечное число ходов, Вася победит.

Критерии. Только ответ при неверной или отсутствующей стратегии — 0 баллов.