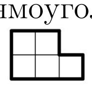
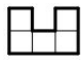
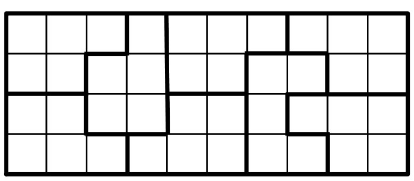
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап (решения/ответы)
2022–23 учебный год
8 класс

Задание 1. Клетчатый прямоугольник, длины обеих сторон которого — чётные числа, разрезали на фигурки вида  и  так, что присутствуют фигурки обоих видов. Какую наименьшую площадь мог иметь такой прямоугольник? Приведите пример соответствующего разрезания и объясните, почему меньшая площадь невозможна. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Длина стороны прямоугольника равна количеству клеточек, прилегающих к ней. Площадь клетчатого прямоугольника — это количество клеток, которые он содержит. (20 баллов)

Ответ. 40.

Решение. Так как площадь обеих фигурок равна 5, а сумма чисел, кратных 5, тоже кратна 5, площадь прямоугольника должна делиться на 5. Так как число 5 — простое, длина одной из сторон должна делиться на 5. Так как длины сторон — четные числа, она должна делиться на 10. Минимальное четное число равно 2, но прямоугольник 2×10 не подходит, так как фигурка второго вида помещается в нем только в горизонтальном положении, но тогда внутри нее остается одна непокрытая клетка, которую уже невозможно накрыть другими фигурками. Поэтому минимальное возможное значение длины другой стороны — 4. Прямоугольник 4×10 разрезать можно, например, так, как показано на рисунке. Следовательно, наименьшая площадь равна 40.



Критерии. Только пример разрезания — 10 баллов.

Только оценка с неверным или отсутствующим разрезанием — 10 баллов.

Задание 2. Мама испекла Ане на день рождения торт, который весит целое число граммов. Перед тем, как украсить его, мама взвесила торт на цифровых весах, которые округляют вес до десятков граммов в ближайшую сторону (если вес оканчивается на 5, то весы округляют его в меньшую сторону). Результат оказался равным 1440 г. Когда мама украсила торт одинаковыми свечками, количество которых было равно возрасту Ани, весы показали 1610 г. Известно, что вес каждой свечки составляет целое число граммов, при этом если положить на весы одну свечу, то они покажут 40 г. Сколько лет может быть Ане? Укажите все ответы и объясните, почему других нет. (20 баллов)

Ответ. 4 года.

Решение. Из условия следует, что до украшения торт весил от 1436 до 1445 граммов, а после украшения — от 1606 до 1615 граммов. Значит, суммарный вес свечей принимает значения от 161 до 179 граммов. Так как вес каждой свечи по отдельности показывается равным 40 г, то одна свеча весит от 36 до 45 граммов. Если Ане меньше 4 лет, то суммарный вес свечей не больше $45 \cdot 3 = 135$ граммов, а если ей больше 4, то суммарный вес свечей не меньше $5 \cdot 36 = 180$ граммов. Ни те, ни другие значения невозможны. Следовательно, Ане ровно 4 года.

Критерии. Верно определены границы веса торта — 3 балла.

Верно определены границы веса всех свечей — 2 балл.

Верно определены границы веса свечи — 3 балла.

Верно проверено только одно из неравенств $n \leqslant 4$ или $n \geqslant 4$ — 4 балла. Все эти критерии суммируются.

Задание 3. Можно ли переменные a, b, c, d заменить на какие-нибудь четыре последовательных натуральных числа в некотором порядке так, чтобы стало верным равенство $(a+b)(b+c)(c+d) = (c+a)(a+d)(d+b)$? (20 баллов)

Ответ. Нет.

Решение. Пусть мы выбрали числа n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Тогда набор их попарных сумм $2n+1$, $2n+2$, $2n+3$, $2n+3$, $2n+4$, $2n+5$. Среди этих сумм ровно две четных: $2(n+1)$ и $2(n+2)$, и поскольку это последовательные четные числа, ровно одно из них делится на 4. Значит, при разбиении этих чисел на 2 группы произведение в одной из них будет делиться на 4 (где окажется число кратное 4), а в другой — нет. Итого, равенство верным быть не может.

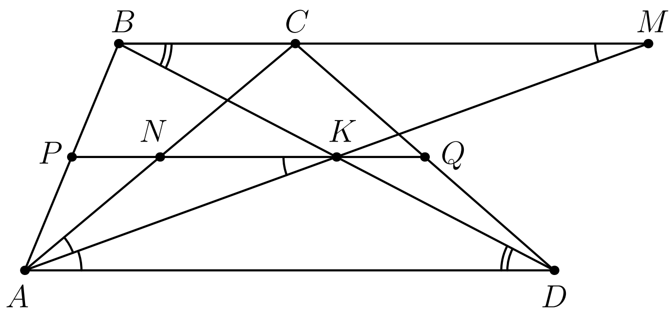
Критерии. Явно сформулировано, что упомянутые в решении шесть сумм образуют набор попарных сумм четырех последовательных чисел — 4 балла.

В решении присутствует идея о наличии среди этих пяти чисел уникального делителя (без дальнейшего продвижения) — еще 2 балла.

Задание 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такая, что $AD = 3BC$. Точка K — середина диагонали BD. Оказалось, что AK — биссектриса угла CAD. Докажите, что $AC = 2BC$. (20 баллов)

Первое решение. Продолжим биссектрису AK до пересечения с прямой BC в точке M. Тогда $\angle BMA = \angle MAD = \angle CAM$, так что $AC = CM$. Кроме того, $\angle BDA = \angle DBM$, $\angle BKM = \angle DKA$ и $KB = KD$, так что треугольники AKD и MKB равны, откуда $BM = AD = 3BC$. Значит, $AC = CM = BM - BC = AD - BC = 2BC$.

Второе решение. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 3x$. Проведем среднюю линию PQ. Она равна $\frac{1}{2}(x+3x) = 2x$. Пусть точка N — середина AC. Тогда средние линии треугольников ABC и BCD равны по $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}x$, поэтому отрезок $NK = 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x$. Поскольку средняя линия параллельна основаниям, $\angle NKA = \angle KAD = \angle KAN$, поэтому $AN = AK = x$. Следовательно, $AC = 2AN = 2x = 2BC$.



Критерии. Сделано дополнительное построение, приводящее к решению задачи, дальнейших существенных продвижений нет — 3 балла.

Задание 5. На шахматной доске стоят 12 ферзей. Докажите, что можно выбрать четыре строчки и четыре столбца так, чтобы ни на одной из 16 клеток, стоящих на их пересечениях, ферзей не было. Доска имеет размеры 8×8. (20 баллов)

Решение. Для начала найдем четыре строчки, в которых стоит суммарно не более четырех ферзей. Если найдутся четыре строчки, в каждой из которых стоит не более одного ферзя, то они подходят. В противном случае, найдутся четыре строчки (а на самом деле хотя бы 5), в каждой из которых ферзей хотя бы два. Тогда в этих четырех строчках вместе стоит хотя бы 8 ферзей, а потому в оставшихся четырех строчках в сумме максимум 4 ферзя.

Итак, в четырех найденных строчках стоят максимум четыре ферзя. Поскольку столбцов всего 8, то найдутся четыре столбца, в которых нет ни одного из этих ферзей (эти не больше, чем четыре ферзя занимают не больше, чем четыре столбца). Тогда вместе с выбранными ранее четырьмя строками эти четыре столбца подходят.

Критерии. Доказано, что существуют четыре строки (или столбца), в сумме содержащие не больше четырех ферзей — 6 баллов.