Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2022/23 учебный год
9 класс

Задание 1. Сегодня Вовочка начал смотреть аниме. Если он будет смотреть по 2 серии в день, то к 1 апреля 2023 (невключительно) у него останется непросмотренными 215 серий. Если же он начнет смотреть по 5 серий в день – то только 50. Какое сегодня число и сколько серий в сериале?

Ответ: 5 февраля 2023 г., 325 серий.

Решение. Пусть до 1 апреля осталось n дней, а в аниме N серий. Тогда по условию $N - 2n = 215$ и $N - 5n = 50$. Вычитая из первого уравнения второе, получим, что $3n = 215 - 50 = 165$, то есть $n = 55$.

(Можно и не вводить переменные. Увеличив интенсивность просмотра на 3 серии в день, Вовочка посмотрит на $215 - 50 = 165$ лишних серий, значит, это займет $165/3 = 55$ дней.)

Это время включает в себя весь март (31 день) и $55 - 31 = 24$ дня февраля. Значит, просмотр начнется через $28 - 24 = 4$ дня от начала февраля, то есть 5 февраля 2023 года.

В сериале $50 + 5 \cdot 55 = 325$ серий.

Критерии оценивания: За полное решение с правильным ответом 20 баллов. За правильно найденное число дней, но неправильную или правильную, но необоснованную дату – 10 баллов. Ответ без обоснования – 0 баллов.

Задание 2. Чему равно наименьшее натуральное число, которое делится на 2022 и запись которого начинается на 2023?

Ответ: 20230110.

Решение. Пусть в искомом числе $n + 4$ цифры, тогда оно имеет вид $2023 \cdot 10^n + a, a < 10^n$. Вычтем из него $2022 \cdot 10^n$, получим, что $b = 10^n + a$ также делится на 2022. То есть нам нужно найти число, запись которого начинается с 1, делящееся на 2022. Числа, делящиеся на 2022 – это 0, 2022, 4044, 6066, 8088, 10110, … . Итак, число b не менее, чем пятизначно, то есть $n \geq 4$. При этом условии наименьшее значение b равно 10110, так что искомое число равно $10110 + 20220000 = 20230110$.

Критерии оценивания: За полное решение 20 баллов. За оценку для b без оценки для n – минус 5 баллов. За ответ без обоснования – 0 баллов.

Задание 3. Из шести отрезков составлены два треугольника с периметром 2 каждый. Один отрезок из первой тройки поменяли местами с отрезком из второй тройки. Теперь из отрезков первой тройки нельзя сложить треугольник. Можем ли мы быть уверены, что из отрезков второй тройки по-прежнему можно сложить треугольник?

Ответ: да, можем.

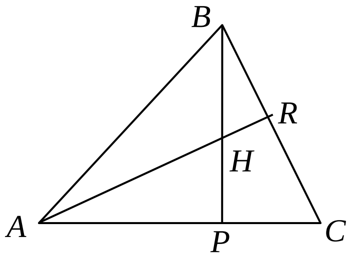
Решение. Из отрезков длиной $a \geq b \geq c$ можно сложить треугольник, если $a < b + c$. С учетом условия $a + b + c = 2$ это неравенство можно переписать в виде $a < 2 - a$, что равносильно $a < 1$. Значит, в исходном наборе все отрезки имеют длины меньше 1. Пусть после обмена получились тройки $a_1 \geq b_1 \geq c_1$ и $a_2 \geq b_2 \geq c_2$. По условию $a_1 \geq b_1 + c_1$. Предположим, что и $a_2 \geq b_2 + c_2$. Складывая эти неравенства, получаем, что $a_1 + a_2 \geq b_1 + c_1 + b_2 + c_2 = 4 - a_1 - a_2$, то есть $a_1 + a_2 \geq 2$. Это противоречит тому, что все отрезки по длине меньше 1. Значит, наше предположение неправильно.

Критерии оценивания: Полное решение – 20 баллов. Ответ без обоснования – 0 баллов. Примеры без решения – 0 баллов. Доказательство условия $a_i < 1$ не более 10 баллов.

Задание 4. Может ли ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника а) делить одну из его высот пополам? б) делить две высоты пополам?

Ответ: а) да; б) нет.

Решение. а) Построим такой треугольник. Пусть *P* – основание той высоты, которая делится пополам. Построим произвольный прямоуголь-ный треугольник *APH*, отложим на луче *PH* отрезок *HB*=*PH*. Тогда прямая *BR* проводится перпендикулярно *AH*, точка *C* есть пересечение *BR* и *AP*. Треугольльник *ABC* – искомый.



б) Предположим, что *AR* также делится точкой *H* пополам. Тогда треугольники *AHP* и *RBH* равны по двум сторонам и углу между ними, но тогда *BR* параллельно *AP*, чего не может быть.

Критерии оценивания: За полное решение каждого пункта по 10 баллов.

Задание 5. Квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + px + q$ удовлетворяет условию $P(q) < 0$. Доказать, что ровно один из его корней лежит в промежутке от 0 до 1.

Решение. Старший коэффициент положителен, то есть ветви параболы направлены вверх и в точке q квадратный трехчлен принимает отрицательное значение, значит есть два корня. Имеем $P(q) = q^2 + pq + q = q(p + q + 1) = P(0) \cdot P(1) < 0$. Значит, в точках 0 и 1 квадратный трехчлен принимает разные знаки. Тогда в силу непрерывности в промежуточной точке он обращается в 0.

Оба корня не могут лежать внутри [0;1], так как в противном случае $P(0)$ и $P(1)$ будут неотрицательны.

Критерии оценивания: Доказано наличие корней – 2 балла. Доказано, что хотя бы один корень лежит в промежутке (0;1) – 15 баллов. Полное решение – 20 баллов.