Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2022/23 учебный год
10 класс

Задание 1. Классная руководительница подсчитала долю девочек в своем классе. Округлив до целого числа процентов, она получила результат 51%. Докажите, что в классе нечетное число учеников. Каково наименьшее возможное число учеников в классе?

Ответ: В классе как минимум 35 человек.

Решение. Пусть из общего числа n учеников в классе m девочек. Тогда $0{,}505n \leq m < 0{,}515n$. Если $\mathrm{n} = 2\mathrm{k}$, это неравенство приобретает вид $1{,}01k \leq m < 1{,}03k$. В частности, $m > k$, то есть $m \geq k + 1$, тогда $k + 1 < 1{,}03k; 1 < 0{,}03k$. Итак, $k > \frac{1}{0{,}03}; k \geq 34$. Но тогда в классе должно быть не менее 68 учеников, что нереально.

Наименьшее число n, при котором такая доля девочек возможна, равно 35. Действительно, аналогичными рассуждениями получаем, что $1{,}01n \leq 2m < 1{,}03n; n \geq 34$. Если $n = 34$, то $34{,}34 \leq 2m < 35{,}02$, откуда $2m = 35$ – невозможно. Если $n = 35$, то $35{,}35 \leq 2m < 36{,}05$, откуда $2m = 36$, $m = 18$. Проверим: $18/35 = 0{,}514\ldots$

Критерии оценивания: Есть пример для четного числа учеников, например 51/100=0.51, но не найдены при какой численности класса это возможно - 3 балла. Есть строгое доказательство с помощью системы неравенств, что четное число учеников возможно, если численность класса >=68 - 10 баллов. Приведен правильный ответ 18/35=0.514 и сказано, что для 17/33=0.5151 условие не выполняется - 5 баллов. Есть строгое доказательство с помощью системы неравенств, что при нечетном числе учеников численность класса >=35 - 10 баллов. Правильное решение минимальности с помощью системы неравенств с арифметической ошибкой (возможно, другой ответ) - 5 баллов.

Задание 2. Назовем год интересным, если человеку в этом году исполняется столько лет, какова сумма цифр года его рождения. Некий год оказался интересным для Ивана, родившегося в 20 веке и для Вовочки, который родился в 21 веке. Какова разница их возрастов?

Примечание. Для удобства считаем, что они родились в один день, все вычисления производятся в целых годах.

Ответ: 18 лет.

Решение. Пусть год рождения Ивана $\overline{19xy}$, а Вовочки – $\overline{20zt}$. Интересным для Ивана будет год $1900 + 10x + y + 10 + x + y$, а для Вовочки – $2000 + 10z + t + 2 + z + t$, по условию эти значения равны, то есть $2002 + 11z + 2t = 1910 + 11x + 2y$, откуда $11\,(x - z) + 2\left(y - t\right) = 92$ или $11a + 2b = 92$, где числа $a = x - z$ и $b = y - t$ – целые, лежащие в пределах от –9 до 9.

Имеем $a = \frac{92-2b}{11}$. Числитель здесь – четное число от 74 до 110, и оно должно делиться на 11. Значит, оно равно 88 или 110. Второй вариант не подходит, так как $a \leq 9$. В первом имеем $a = 8$; $b = 2$.

По условию задачи нам нужно найти число

$$\overline{20zt} - \overline{19xy} = 100 - 10\,(x - z) - \left(y - t\right) = 100 - 10a - b = 18$$

Проверим, реализуется ли этот случай. Например, $8 = 9 - 1$; $2 = 7 - 5$. Пусть Иван родился 1997 году, Вовочка – в 2015. Для Ивана интересный год – это $1997 + 1 + 9 + 9 + 7 = 2023$, для Вовочки – $2015 + 2 + 0 + 1 + 5 = 2023$. При этом Иван старше на $2015 - 1997 = 18$ лет.

Заметим, что мы не рассмотрели особый случай, когда Иван родился в 2000 году (этот год также относится к 20 веку). В этом случае интересный год – 2002. Но он не будет интересным ни для родившихся в 2001 (интересный – 2004), ни, тем более, для последующих годов рождения (интересный год наступает после года рождения).

Критерии оценивания: Дан правильный ответ (18) и приведен один или несколько примеров, когда он достигается – 5 баллов. Получено равенство вида 11a+2b=92 - 10 баллов. Полное решение предыдущего равенства (a=8, b=2) - 5 баллов. Полное решение без рассмотрения особого случая (год рождения Ивана 2000) - 15 баллов. Рассмотрен особый случай и показано, что он не подходит - 5 баллов.

Задание 3. Найдите все решения уравнения $x^2 - [x] = 1$. Здесь $[x]$ – целая часть x, то есть наибольшее целое, не превосходящее данное число. Например, $[2{,}9] = 2$; $[-2{,}9] = -3$.

Ответ. $\sqrt{2}$

Решение. 1 способ. Пусть $[x] = n$. Тогда уравнение сводится к виду $x^2 = n + 1$ с дополнительным ограничением $n \le x < n + 1$. Нам известно значение x^2, поэтому желательно возвести неравенство в квадрат. Это возможно, если его члены неотрицательны.

В силу того, что x^2 неотрицателен, $n + 1 \ge 0; n \ge -1$. Единственное отрицательное значение $n = -1$. В этом случае $x = 0$, $[x] \ne n$. Решения нет.

Если $n \ge 0$, то x также неотрицательно. Тогда нераверство $n \le x$ можно возвести в квадарат, получим $n^2 \le x^2 = n + 1$. Решая неравенство $n^2 \le n + 1$ получаем, что $\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{3}{4}$; то есть $0 \le n \le \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}37$. Значит, подходит только $n \le 1$.

Если $n = 0$, то $x = 1$, $[x] \ne n$.

Если $n = 1$, то $x = \sqrt{2}$, $[x] = 1 = n$ – решение.

2 способ. Введем обозначение $x = [x] + t$, $0 \le t < 1$. Тогда $[x] = x - t$, уравнение приобретает вид $x^2 - x = 1 - t$. В частности, $0 < x^2 - x \le 1$.

Решим эту систему неравенств, например, так: $1 \le 4x^2 - 4x + 1 < 5$; $1 \le (2x - 1)^2 < 5$. Итак, $-\sqrt{5} \le 2x - 1 < -1$ или $1 \le 2x - 1 < \sqrt{5}$.

1. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x < 0$, тогда $[x] = -1$ и уравнение приобретает вид $x^2 + 1 = 1$, $x = 0$ – не удовлетворяет ограничениям.

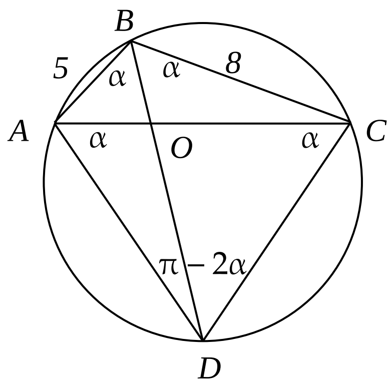
2. $1 \le x < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, тогда $[x] = 1$, уравнение приобретает вид $x^2 - 1 = 1$, $x = \sqrt{2}$ (отрицательный корень не подходит в силу неравенств)

Примечание. Систему неравенств $0 < x^2 - x \le 1$ можно решить, например, графически. Решение состоит из двух интервалов. На первом $[x] = -1$, должны выполняться условия $x^2 + 1 = 1$, $-1 \le x < 0$ – нет решений.

Для второго интервала $[x] = 1$, уравнение приобретает вид $x^2 - 1 = 1$, подходит корень $x = \sqrt{2}$, так как $\left[\sqrt{2}\right] = 1$.

Критерии оценивания: Дан правильный ответ ($\sqrt{2}$) - 5 баллов. Полное решение задачи, включая рассмотрение всех интервалов: x<-1, -1<x<0, 0<x<1, 1<x<2, x>2 - 20 баллов. Пропущен хотя бы один интервал или при его рассмотрении допущена ошибка - -5 баллов. Присутствуют лишние корни - -5 баллов.

Задание 4. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 5$; $BC = 8$. Биссектриса угла B пересекает описанную вокруг треугольника окружность в точке D. а) Известно, что площадь треугольника ABD равна 10. Найти площадь треугольника BCD. б) Может ли оказаться, что S_{ABD} равна 100?



Ответ: а) 16; б) да.

Решение. а) То, что точка D лежит на окружности, неважно. Площади треугольников ABO и OBC относятся как $AO : OC$. То же для треугольников AOD и DOC. Значит, и

$$S_{ABD}:S_{BCD} = AO:OC = AB:BC = 5:8$$

по свойству биссектрисы.

б) 1 способ. Пусть угол ABD равен α, $AB = a = 5$, $BC = b = 8$, $AC = c$. Ясно, что D – середина дуги AC, так что $AD = CD = \frac{AC}{2} / \cos\alpha = \frac{c}{2\cos\alpha}$. По теореме Птолемея $BD \cdot c = a \cdot CD + b \cdot AD = (a + b) \cdot \frac{c}{2\cos\alpha}$, откуда $BD = \frac{a+b}{2\cos\alpha}$

Имеем

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} a \cdot BD \sin\alpha = \frac{a(a+b)}{4} tg\,\alpha$$

Эта величина при подходящем α принимает произвольное положительное значение.

2 способ. По доказанному ранее условие $S_{ABD} = S_0$ равносильно тому, что $S = S_{ABCD} = \frac{a+b}{a} S_0$.

Вычислим площадь четырехугольника $ABCD$.

$$S = \frac{1}{2} ab \sin 2\alpha + \frac{1}{2} AD \cdot CD \sin 2\alpha = \frac{1}{2}\left(ab + \frac{1}{4}\frac{c^2}{\cos^2\alpha}\right)\sin 2\alpha =$$

$$= \frac{4ab\cos^2\alpha + c^2}{8\cos^2\alpha}\sin 2\alpha = \left(4ab\cos^2\alpha + a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\alpha\right)\frac{\sin 2\alpha}{8\cos^2\alpha} =$$

$$(a^2 + b^2 + 2ab(2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha)) = \frac{(a+b)^2}{4} tg\,\alpha$$

Эта величина при подходящих α принимает всевозможные положительные значения.

Критерии оценивания: Полное решение пункта а) с правильным ответом 16 - 10 баллов. Правильный ответ в пункте б) без строгих или неполных доказательств - 0 баллов. Полное решение пункта б) с указанием условия/условий, когда такое возможно. Например, сказано, что $\mathrm{tg}\,\alpha = 80/13$ или $BD = \sqrt{6569}/2$ - 10 баллов

Задание 5. На карточках написаны числа от 1 до 100. Людочке нужно выбрать 4 карточки так, чтобы сумма чисел на них была равна 50. а) Вовочка потерял какие-то 11 карточек. Может ли Людочка быть уверена, что сможет выполнить задание? б) Тот же вопрос, если Вовочка потерял 10 карточек.

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. а) Предположим, что Вовочка потерял карточки с номерами от 1 до 11. Среди оставшихся наименьшие четыре – это 12, 13, 14, 15; сумма значений на них равна 54. Значит, в этом случае 50 нельзя набрать никакими четырьмя карточками.

б) Будем подбирать карточки парами так, чтобы сумма в паре была равна 25. Таких пар 12, это 1 + 24; 2 + 23; …; 12 + 13. Даже если из 10 пар карточки потеряны, останутся ещё две пары, которые и будут искомыми.

Критерии оценивания: Приведен пример набора из 11 потерянных карточек и доказано, что в этом случае 50 не получить - 5 баллов. Приведен верный пример набора из 11 потерянных карточек без доказательства, что в этом случае 50 не получить - 3 балла. Рассмотрен один или несколько частных случаев из 10 потерянных карточек и показано, что в этом случае удается получить 50 - 0 баллов. Полное решение пункта б) - 15 баллов.