Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2022/23 учебный год
11 класс

Задание 1. У Маши есть копилка, куда она каждую неделю кладет купюру в 50 или 100 рублей. В конце каждых 4 недель она выбирает из копилки купюру наименьшего достоинства и дарит сестренке. Через год оказалось, что сестренке она отдала 1250 рублей. Какое минимальное количество денег могло накопиться за это время у нее самой?

Ответ: 3750 рублей.

Решение. Назовем 4-недельный промежуток «месяцем», таких «месяцев» в году 13. Если бы все подаренные Машей купюры были сторублевыми, сестра получила бы 1300 рублей. Значит, Маша двенадцать раз дарила по 100 рублей и один – 50. Если в какой-то «месяц» Маша отдала 100 р., значит, и в копилке у нее были только сотни. То есть за эти 12 «месяцев» она оставила себе $12 \cdot 300 = 3600$ р.

Итак 50-рублевки могли появиться у Маши только в один месяц из 13. Если за «месяц» в копилку попала только одна, она ее подарила в конце месяца, так что ее «доход» был по-прежнему 300 р.

Если в какой-то «месяц» Маша откладывает не менее двух 50-рублевых купюр, она отдает их сестре в течение последовательных «месяцев», что противоречит условию. Исключение – случай, когда они все пришли в 13-м «месяце», тогда она не успеет их отдать. Итак, в этом случае первые 12 «месяцев» Маша получала по 300 рублей, а в последний могла положить в копилку от нуля до трех 50-рублевых купюр, то есть недобрать до 300 рублей максимум 150 р.

Критерии оценивания: Сказано, что Маша отдавала деньги 13 раз, причём 12 раз по 100 руб. и 1 раз по 50 - 5 баллов. Правильный ответ без упоминания, что 50 руб. отдаются только в последний месяц - 10 баллов. Правильное решение задачи, но в ответе указана сумма с учетом отданных сестре денег (3750+1250=5000) - 17 баллов.

Задание 2. а) Может ли для некоторых a,b оказаться, что $\log_2 a \cdot \log_2 b = \log_2 ab$?

б) Может ли для некоторых a,b оказаться, что $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 (a+b)$?

в) Могут ли при каких-то $a,\ b$ выполняться оба равенства?

Ответ: а) Да; б) Да; в) Нет.

Решение. Ясно, что числа $a,\ b$ положительны.

а) Условие можно переписать в виде $\log_2 a \cdot \log_2 b = \log_2 a + \log_2 b$. Если $\log_2 a \neq 1$, то $x = \log_2 b = \frac{\log_2 a}{\log_2 a - 1}$, $b = 2^x$. Например, при $a = 4$ имеем $\log_2 a = 2$; $x = \frac{2}{2-1} = 2$, $b = 4$.

б) Равенство сводится к соотношению $ab = a + b$. Например, при $a = 4$ получаем, что $b = \frac{a}{a-1} = \frac{4}{3}$.

в) Условие вида $xy = x + y$, можно переписать в виде $(x-1)(y-1) = 1$. Предположим, что выполняются пункты а), б). Заданные равенства можно переписать в виде

$$\begin{cases} (\log_2 a - 1)(\log_2 b - 1) = 1 \\ ab = a + b \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $\log_2 a - 1$ и $\log_2 b - 1$ имеют одинаковый знак. То есть либо они оба положительны (тогда $a > 2; b > 2$), либо оба отрицательны, $a < 2; b < 2$. В силу положительности чисел a и $b = \frac{a}{a-1}$ имеем $a > 1$.

Если $a > 2$; $a - 1 > 1$; $\frac{1}{a-1} < 1$; $b = 1 + \frac{1}{a-1} < 2$.

Если $1 < a < 2$; $0 < a - 1 < 1$; $\frac{1}{a-1} > 1$; $b = 1 + \frac{1}{a-1} > 2$.

Пришли к противоречию.

Критерии оценивания: Приведено хотя бы одно решение пункта а) - 5 баллов. Приведено хотя бы одно решение пункта б) - 5 баллов. Приведено полное доказательство отсутствия решения в пункте в) - 10 баллов. Графическое решение в пункте в) без строгого обоснования вида построенных графиков - 3 балла.

Задание 3. Обозначим $\min\frac{x-1}{x^2+1}=a;\ \max\frac{x-1}{x^2+1}=b$. Чему равны минимум и максимум функций а) $\frac{x^3-1}{x^6+1}$; б) $\frac{x+1}{x^2+1}$?

Ответ: а) $\min\frac{x^3-1}{x^6+1}=a;\ \max\frac{x^3-1}{x^6+1}=b$; б) $\min\frac{x+1}{x^2+1}=-b;\ \max\frac{x+1}{x^2+1}=-a$.

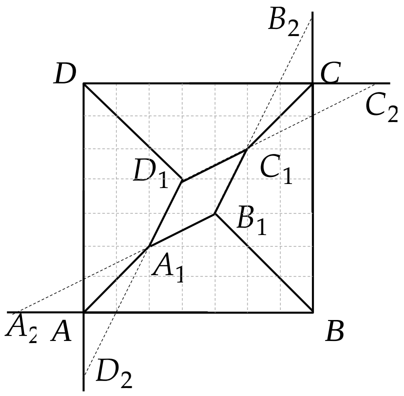
Решение. Введем обозначение $\frac{x-1}{x^2+1}=f(x)$.

а) Имеем $\frac{x^3-1}{x^6+1}=f(x^3)$. Величина x^3 пробегает все числовые значения, значит, $f(x^3)$ принимает такие же значения, как $f(x)$.

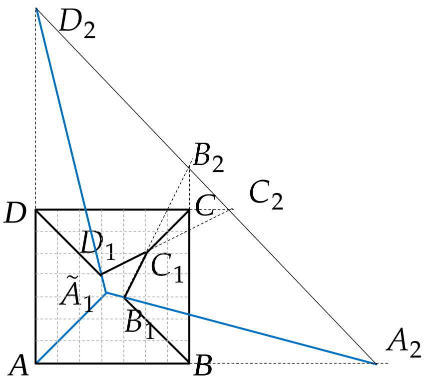
б) Имеем $f(-x)=\frac{-x-1}{x^2+1}=-\frac{x+1}{x^2+1}$, то есть $\frac{x+1}{x^2+1}=-f(-x)$, значит, эта функция принимает значения от $-b$ до $-a$.

Критерии оценивания: Полное решение пункта а) - 7 баллов. Решение пункта а) через производную без рассмотрения поведения функции на бесконечности - 5 баллов. Полное решение пункта б) - 13 баллов. Решение пункта б) через производную без рассмотрения поведения функции на бесконечности - 5 баллов. В качестве max и min принимались не значения функции, а значения аргумента в экстремальных точках - 0 баллов.

Задание 4. Многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ изображен в ортогональной проекции на плоскость $ABCD$. Докажите, что такой многогранник невозможен.



Решение. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке A_2, лежащей в обеих плоскостях, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то есть на их общей прямой. То же верно для точек B_2, C_2, D_2 получающихся как пересечения одноименных рёбер. Значит, все эти точки должны лежать на одной прямой, что не выполняется.



Если зафиксировать, например, точки B_1, C_1, D_1, то можно построить изображение вершины A_1 (на рисунке это точка $\tilde{A}_1$)

Критерии оценивания: Решение в предположении, что грань A1B1C1D1 параллельна грани ABCD - 0 баллов. Решение проведено для усеченной пирамиды без доказательства данного утверждения - 10 баллов.

Задание 5. Рассмотрим алгебраическое выражение $F(a, \ldots, x)$, содержащее переменные, скобки и операции умножения и вычитания. Числовые константы не используются. Заменим один из знаков операции на $\perp$, другой – на $\bowtie$. Назовем полученное выражение «формулой». Например, формулой будет выражение $(a \bowtie b) \perp c$, причем один из знаков обозначает разность, а другой – умножение.

а) существует ли формула, которая при любых значениях переменных (и любом из смыслов знаков) дает значение 0?

б) существует ли формула, которая при любых значениях переменных дает значение 1?

Ответ: а) да, например, $(a \perp a) \bowtie (a \perp a)$; б) нет.

Решение. а) Рассмотрим формулу $A = a \perp a$, Если $\perp$ – вычитание, то выражение тождественно равно 0. Если $\perp$ – умножение, то $A = 0$ при $a = 0$. Поэтому выражение $N = (a \perp a) \bowtie (a \perp a)$ равно 0 при любом смысле знаков $\perp$ и $\bowtie$. Действительно, если $\perp$ – вычитание, то $N = 0 \cdot 0 = 0$. Если же $\perp$ – умножение, то $\bowtie$ – вычитание, тогда $N = a \cdot a - a \cdot a = 0$.

б) Предположим, что переменным a, b, ... приданы четные значения. Тогда и $a \bowtie b$ и $a \perp b$ также являются чётными. Поэтому при таких значениях переменных любая формула имеет четное значение.

Критерии оценивания: Приведен хотя бы один пример выражения в пункте а) - 10 баллов. Полное доказательство невозможности выражения в пункте б) - 10 баллов. Голословные утверждения в пункте б), следующие из перечисления частных случаев, когда разность/произведение двух чисел равно 1 - 0 баллов.